IV. Erzeugende Funktionen

VL 12, 27.1.10

11. Potenzreihen

Bsp 11.1 Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$a_0 := 2$, $a_n := 3 \cdot a_{n-1} + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

also $a_1 = 3 \cdot a_0 + 1 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$ usw.

Hatten schon bewiesen, dass dann $a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^n - 1)$ gilt.

Wollen diese Formel jetzt „herleiten".

(1) Potenzreihe aufstellen $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(2) Anfangswerte und Rekursionsformel einsetzen

$$A(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (3 a_{n-1} + 1) x^n$$

$$= 2 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$$= 2 + 3x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

(3) Ersetze a_n durch $A(x)$:

$$A(x) = 2 + 3x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 1$$

$$\underset{\text{geom. Reihe}}{=} 1 + 3x\, A(x) + \frac{1}{1-x}$$

(4) Löse nach $A(x)$ auf:

$$A(x) - 3x\,A(x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$A(x)\,(1-3x) = 1 + \frac{1}{1-x}$$

$$A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{1}{(1-3x)(1-x)}$$

(5) Schreibe rechte Seite als Potenzreihe(n):

$$\frac{1}{(1-x)(1-3x)} \overset{?}{=} \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{3}{2}}{1-3x},$$

denn:

$$= \frac{-\frac{1}{2}(1-3x) + \frac{3}{2}(1-x)}{(1-x)(1-3x)} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{1}{(1-x)(1-3x)}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{1-3x} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{3}{2}}{1-3x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{1-3x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$\overset{?}{=} \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

(6) Koeffizientenvergleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(5 \cdot 3^n - 1)\, x^n$$

? (für unendlich viele $x \in \mathbb{R}$?) $\Rightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n = \frac{1}{2}(5 \cdot 3^n - 1).$$

Bsp: A 6.3 : $b_0 := 2$, $b_{n+1} = 3b_n + 4^n$

A 6.4 $d_0 := 1$, $d_{n+1} = 2d_n + n$

Exkurs „Potenzreihen"

Vereinbarung: $\sum a_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

DEF: $A(x) := \sum a_n x^n$ heißt „an der Stelle x konvergent", wenn die Folge $z_k := \sum_{n=0}^{k} a_n x^n$ konvergiert.

Satz 11.2 Wenn $A(x) = \sum a_n x^n$, dann gibt es nur 3 Möglichkeiten:

a) $A(x)$ konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $A(x)$ konvergent nur für $x = 0$

c) $\exists r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ so dass $A(x)$ konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$.

Das größte solche $r \in \mathbb{R}$ in c) heißt Konvergenzradius von A.

Bsp: a) $\sum \frac{1}{n!} x^n$ konv. $\forall x \in \mathbb{R}$ $(\exp(x))$.

b) $\sum 2^{(n^2)} x^n$ Konv nur für $x = 0$

c) $\sum q^n x^n$ heißt geom. Reihe und konv. für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \left|\frac{1}{q}\right|$.

Satz 11.3

Konvergenzkriterium: Wenn $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ existiert, dann ist r Konv.radius von A.

Bsp: $a_n = q^n \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{q^n}{q^{n+1}} = \frac{1}{q}$.

Satz 11.4 Seien $A(x) = \sum a_n x^n$ und $B(x) = \sum b_n x^n$ zwei Potenzreihen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$ konvergieren.

a) Wenn $C(x) = \sum c_n x^n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$,
dann ist $C(x)$ auch konvergent $\forall x$ mit $|x| < r$ und es gilt
$C(x) = A(x) \cdot B(x)$.

b) Wenn für das in a) beschriebene $C(x) = \sum c_n x^n$ gilt, dass $c_0 = 1$ und $c_i = 0$ $\forall i \in \mathbb{N}$,
dann heißt $B(x)$ inverse Potenzreihe zu $A(x)$.
Es gilt: $\exists$ inverse Pot.reihe $B(x)$ zu $A(x)$
$\Leftrightarrow$ $a_0 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad b_0 = \frac{1}{a_0} \quad \text{und} \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

c) A ist für alle x mit $|x| < r$ diffbar, die Ableitung A' konvergiert $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < r$ und es gilt
$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Kor 11.5 $q \in \mathbb{R}$

$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$. Sei $B(x) = \sum b_n x^n$ die zu A inverse Pot. reihe.

11.4 b) $\Rightarrow$ $b_0 = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{q^0} = 1$ und

$b_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$, also

$\underline{b_1} = -a_1 b_0 = -q^1 \cdot 1 = \underline{-q}$

$b_2 = -(a_1 b_1 + a_2 b_0) = -(-q^2 + q^2) = 0$

BEH: $b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$.

$\underline{b_n} = -(a_1 \underbrace{b_{n-1}}_{0} + a_2 \underbrace{b_{n-2}}_{0} + \ldots + a_{n-2} \underbrace{b_2}_{0} + a_{n-1} b_1 + a_n b_0)$

$= -(q^{n-1}(-q) + q^n \cdot 1) = \underline{0}$.

Also ist $B(x) = b_0 + b_1 \cdot x = 1 - qx$ die zu A inv. Pot.reihe

$\Rightarrow (\sum q^n x^n) \cdot (1 - qx) = 1$, also

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \left|\frac{1}{q}\right|$. $\sum q^n x^n = \frac{1}{1-qx}$.

Bilde k-fache Ableitung: $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall |x| < 1$

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

also

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

$\forall k \in \mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Satz 11.6

Wenn $A(x) = \sum a_n x^n$ und $B(x) = \sum b_n x^n$
und $J = \{x \in \mathbb{R} : c < x < d\} \neq \emptyset$, so dass
A und B $\forall x \in J$ konvergieren und dort $A(x) = B(x)$,
dann $\forall n \in \mathbb{N}_0 : a_n = b_n$.

[Check: $A(x) - B(x) = 0 \quad \forall x \in J$.]

D.h. Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \longrightarrow$ Funktion $A(x) = \sum a_n x^n$

ist inj.

$\Rightarrow \exists$ Umkehrung.
Man sagt: $A(x)$ ist die erzeugende Funktion der Folge
$a_0, a_1, a_2, \ldots$

Aber: Wie berechnet man die Folge?
$a_0 = A(0)$, $a_1 = A'(0)$, $a_2 = \frac{A''(0)}{2}$, ...

Satz 11.7

Sei $A(x) = \sum a_n x^n$ Potenzreihe mit Konv.radius $r > 0$.

Dann
$$a_n = \frac{A^{(n)}(0)}{n!}$$
wobei $A^{(n)}(0)$ die n-te Ableitung an der Stelle 0 bezeichnet.

Bsp 11.8 Hatten schon bewiesen

$$(x+y)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} x^n y^{r-n}.$$
$$(x+1)^r = \sum_{n=0}^{r} \binom{r}{n} x^n \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{N}$$

Ziel: auch für $r \in \mathbb{R}$. $\quad \frac{r^{\underline{n}}}{n!} = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-n+1)$

$$A(x) = (x+1)^r = \sum a_n x^n$$
$$A^{(n)}(x) = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-n+1)(x+1)^{r-n}$$
$$\Rightarrow A^{(n)}(0) = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-n+1) = r^{\underline{n}}$$

Also $\boxed{(x+1)^r} = A(x) \overset{11.7}{=} \sum \frac{A^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$= \sum \frac{r^{\underline{n}}}{n!} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n}.$$