VL 14, 10.2.10

Vorbesprechung Proseminar
„Probabilistische und algebraische
Methoden in der Diskreten Mathematik"

---

und direkt danach: VL Diskrete Mathematik.

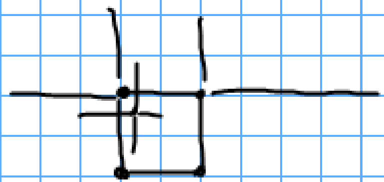
1)

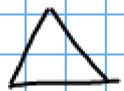
$\mathbb{R}^d$, $\quad \mathrm{dist}(a,b) := \|a-b\|_2$

$U^d := (\mathbb{R}^d, E^d)$

$E^d := \{ \{a,b\} : a,b \in \mathbb{R}^d, \ \mathrm{dist}(a,b) = 1 \}$

U^2:





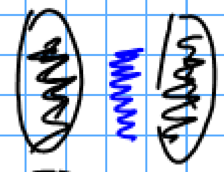
HA: $4 \le \chi(U^2) \le 7$

PS: $1.1^d \le \chi(U^d) \le 9^d$

$\uparrow$

Lin. Alg.

2) **Satz:** Jeder Graph $G = (V, E)$ hat Bipartition $V = A \,\dot\cup\, B$, so dass mindestens die Hälfte der Kanten von G zwischen A und B verlaufen.



$50 \qquad 50$

$2500 \qquad 2 \cdot \binom{50}{2}$

$A, B,$

Bew: Werfe Münze für jeden Knoten.

Sei $e = \{x, y\}$.

$\Pr[e \text{ verläuft zwischen } A \text{ und } B]$

$= \Pr[x \to A \text{ und } y \to B] + \Pr[x \to B \text{ und } y \to A]$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ im Durchschnitt sind die Hälfte aller Kanten zwischen A und B.

Organisation:

* Vortrag
  - 2 zu zweit
  - Material → Fragen
  - Schein: Keine Noten, keine Ausarbeitung.

email an taraz@ma.tum.de bis 17.2.10

subject: [proseminar]

- Warum?
- Was bisher? (Noten)
- HA. Themenvorschläge.
- Standardseminar: $\boxed{\text{Di } 14-16\ ??}$

13. Asymptotisches Zählen

Def 13.1 (Landau-Notation) $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ ("oh") $:\Longleftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

$f(n) = \Omega(g(n)) \ :\Longleftrightarrow \ \ldots\ldots \ \geq$

$f(n) = \Theta(g(n)) \ :\Longleftrightarrow \ f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ und $f(n) = \Omega(g(n))$.

$f(n) = o(g(n)) \ :\Longleftrightarrow \forall c \in \mathbb{R}_{>0}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : \ |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$.

$f(n) = \omega(g(n)) \ :\Longleftrightarrow \ \ldots\ldots \ \geq$

Bsp 13.2

a) $7n^2 + 17n = O(n^2)$

b) $17n = O(n^2)$

c) $7n^2 + 17n = \Theta(n^2)$

d) $17n \neq \Theta(n^2)$

e) $\frac{1}{7}n^2 + n = o(n^{2.1})$

f) $\frac{1}{7}n^2 + n \neq o(n^2)$.

Bew: a) Setze z.B.: $c := 8$, $n_0 := 17$. Dann:

$\forall n \geq n_0$: $7n^2 + \underbrace{17n} \leq 7n^2 + n^2 \leq 8 \cdot n^2$.

b) siehe zu a)

c) $\exists c_1 \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists c_2 \in \mathbb{R}_{>0} \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0$

$c_1 \cdot n^2 \leq 7n^2 + 17n \leq c_2 \cdot n^2$

Wähle z.B.: $c_2 := 8$, $n_0 := 17$, $c_1 := 3$.

d) falsch.

Bem 13.3

$$f(n) = o(g(n)) \overset{\text{DEF}}{\Longleftrightarrow} \forall c > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad |f(n)| \leq c \cdot |g(n)|$$

$$\Longleftrightarrow \forall c > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \quad \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| \leq c$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = 0$$

zurück zu

Bsp 13.2

e) $$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \frac{\frac{1}{7}n^2 + n}{n^{2.1}} = \frac{\frac{1}{7}}{n^{0.1}} + \frac{1}{n^{1.1}} \longrightarrow 0 .$$

f) $$\left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = \frac{\frac{1}{7}n^2 + n}{n^2} = \frac{1}{7} + \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{7} > 0$$

Eigentlich: $\underline{f \in O(g)}$

Bsp 13.4

a) $$(2n+17)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (2n)^i \, 17^{k-i} = (2n)^k + O(n^{k-1}).$$

$$= O(n^k)$$

b) $$\frac{(2n+3)^4}{(3n-2)^2\,(5n+1)} = \frac{16n^4 + o(n^4)}{45n^3 + o(n^3)}$$

$$= \frac{16n^4 \cdot (1 + o(1))}{45n^3 \cdot (1 + o(1))} = \frac{16}{45} n \cdot (1 + o(1)).$$

$$f = o(1) \iff \frac{f}{1} \longrightarrow 0$$

c) $$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!} n^k + O(n^{k-1}).$$

Satz 13.5 (Stirlingsche Formel)

a) $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \underline{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$

b) (gröber) $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \Theta(\sqrt{n})$.

Bew: bissl Analysis.

Folgerung 13.6

Sei $0 < \alpha < 1$. Dann

a) $\binom{n}{\alpha n} = \dfrac{2^{H(\alpha)\cdot n}}{\Theta(\sqrt{n})}$ (wenn $\alpha n \in \mathbb{N}$),

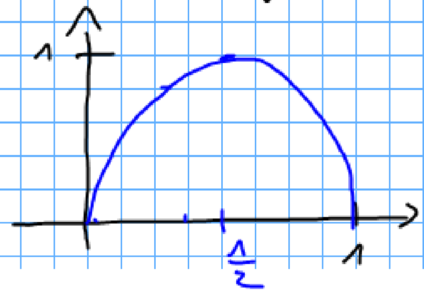
wobei $H(\alpha) := -\alpha \log_2(\alpha) - (1-\alpha)\cdot \log_2(1-\alpha)$.

b) $\binom{n}{\frac{n}{2}} = \dfrac{2^n}{\Theta(\sqrt{n})}$

c) $\binom{n}{\frac{n}{4}} = \dfrac{2^{2n}\, 3^{-\frac{3}{4}n}}{\Theta(\sqrt{n})}$.

$\binom{n-1}{0}$ ...

$\binom{n}{0}$ $\binom{n}{1}$ ...... $\binom{n}{n}$



Bew 13.6

a) $$\binom{n}{\alpha n} = \frac{n!}{(\alpha n)!\,(n-\alpha n)!} = \frac{n!}{(\alpha n)!\,((1-\alpha)n)!}$$

13.5 b)

$$= \frac{\cancel{n^n}\,\Theta(\sqrt{n})\;\cancel{e^{\alpha n}}\;\cancel{e^{(1-\alpha)n}}}{\cancel{e^n}\;(\alpha \cancel{n})^{\alpha n}\,\Theta(\sqrt{\alpha n})\;((1-\alpha)\cancel{n})^{(1-\alpha)n}\,\Theta(\sqrt{(1-\alpha)n})}$$

$$= \frac{\boxed{\alpha}^{-\alpha n}\;\boxed{(1-\alpha)}^{-(1-\alpha)n}}{\Theta(\sqrt{n})} = \frac{2^{\log_2 \alpha\,(-\alpha n)}\;2^{\log_2 (1-\alpha)\,(-(1-\alpha)n)}}{\Theta(\sqrt{n})}$$

$$= \frac{2^{[-\alpha \log_2 \alpha - (1-\alpha)\cdot \log_2 (1-\alpha)]\cdot n}}{\Theta(\sqrt{n})} = \frac{2^{H(\alpha)\cdot n}}{\Theta(\sqrt{n})}.$$

qed.