Ferienkurs zum Propädeutikum Diskrete Mathematik

Andreas Würfl Stefan König

Technische Universität München

WS 09/10

Übersicht

Binäre Relationen

Binäre Relationen

Relation:

M Menge, $R \subseteq M \times M$

Schreibweisen:

$(a, b) \in R$, $a \sim_R b$, $a \preceq_R b$, aRb, $\ldots$

R heißt

- reflexiv: $\forall a \in M : a \sim a$
- irreflexiv: $\forall a \in M : a \not\sim a$
- symmetrisch: $\forall a, b \in M : a \sim b \Rightarrow b \sim a$
- antisymmetrisch: $\forall a, b \in M : a \sim b$ und $b \sim a \Rightarrow a = b$
- transitiv: $\forall a, b, c \in M : a \sim b$ und $b \sim c \Rightarrow a \sim c$

- Graph: irreflexiv und symmetrisch
- partielle Ordnung: reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

Binäre Relationen

Äquivalenzrelation:

- reflexiv, symmetrisch, transitiv
- Äquivalenz-Klasse: $[a]_\sim := \{b \in M : a \sim b\}$

Satz:

Sei R Äquivalenzrelation

$\Rightarrow$ Äquivalenzklassen bilden eine Partition von M

$\Rightarrow$ $a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\sim = [b]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset$

Aufgabe:

Es seien R_1, R_2 zwei Äquivalenz-Relationen auf M. Welche Eigenschaften hat dann...?

a) $R_1 \cap R_2$

b) $R_1 \cup R_2$

c) $R_1 \setminus R_2$

Posets:

- reflexiv, antisymmetrisch, transitiv $(\preceq_R)$

Aufgabe:

Es seien R_1, R_2, Posets. Welche Eigenschaften haben...?

a) $R_1 \cap R_2$

b) $R_1 \cup R_2$

c) $R_1 \backslash R_2$

Binäre Relationen

Posets:

- $x, y \in M$ vergleichbar $:\Leftrightarrow x \preceq y \quad$ oder $\quad y \preceq x$
- sonst unvergleichbar

- $K \subseteq M$ Kette $:\Leftrightarrow \ \forall x, y \in K\colon x, y$ vergleichbar
- $A \subseteq M$ Antikette $:\Leftrightarrow \ \forall x, y \in A\colon x, y$ unvergleichbar

Satz:

a) $\max\limits_{A \text{ Antikette}} |A| = \min\{k : M \text{ lässt sich in } k \text{ Ketten part. }\}$

b) $\max\limits_{K \text{ Kette}} |K| = \min\{a : M \text{ lässt sich in } a \text{ Antiketten part. }\}$

Elementares Zählen

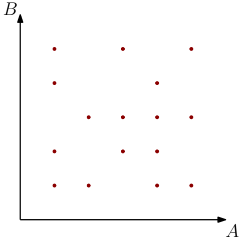
Elementares Zählen

Summenregel:

$$M = M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k \ \Rightarrow\ |M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$$

Produktregel:

$$M = M_1 \times \cdots \times M_k \ \Rightarrow\ |M| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$$



Doppeltes Abzählen:

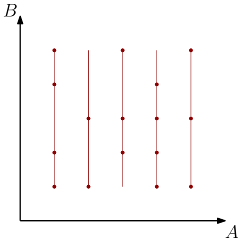
$$R \subseteq A \times B$$

$$\Rightarrow\ \sum_{a \in A} |\{b \in B : (a,b) \in R\}| = |R| = \sum_{b \in B} |\{a \in A : (a,b) \in R\}|$$

Elementares Zählen

Summenregel:

$$M = M_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} M_k \;\Rightarrow\; |M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$$



Produktregel:

$$M = M_1 \times \cdots \times M_k \;\Rightarrow\; |M| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$$

Doppeltes Abzählen:

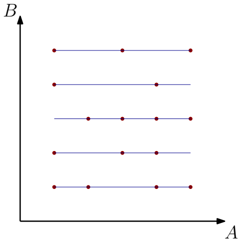
$$R \subseteq A \times B$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in A} |\{b \in B : (a,b) \in R\}| = |R| = \sum_{b \in B} |\{a \in A : (a,b) \in R\}|$$

Elementares Zählen

Summenregel:

$$M = M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k \;\Rightarrow\; |M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$$



Produktregel:

$$M = M_1 \times \cdots \times M_k \;\Rightarrow\; |M| = \prod_{i=1}^{k} |M_i|$$

Doppeltes Abzählen:

$$R \subseteq A \times B$$

$$\Rightarrow \sum_{a \in A} |\{b \in B : (a,b) \in R\}| = |R| = \sum_{b \in B} |\{a \in A : (a,b) \in R\}|$$

Elementares Zählen

Summenregel:

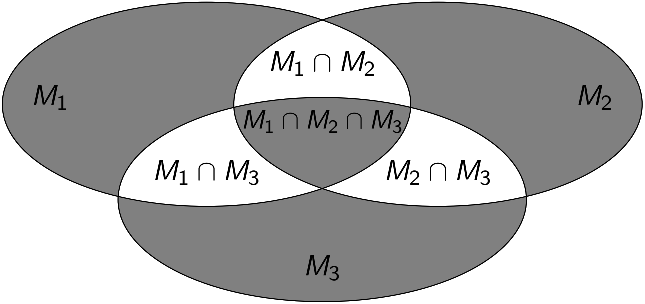
$$M = M_1 \dot\cup \ldots \dot\cup M_k \ \Rightarrow \ |M| = \sum_{i=1}^{k} |M_i|$$

Inklusion-Exklusion:

$M = M_1 \cup \cdots \cup M_k \Rightarrow$ schon komplizierter!

Inklusion-Exklusion

$$|M| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} \left| \bigcap_{i \in I} M_i \right|$$



$$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$$

Elementares Zählen

k aus n Elementen wählen

	geordnet	ungeordnet
mit Zurücklegen	n^k	$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}$
ohne Zurücklegen	$n^{\underline{k}}$	$\binom{n}{k}$

Beispiele:

- Spiel 77: Auslosung einer 7-stelligen Zahl
- Wanddeko: 15 Bilder, 8 Bilderrahmen in einer Galerie
- Kniffel: Anzahl Resultate nach einem Wurf
- Lotto: Ziehe 6 aus 49

Elementares Zählen

Wichtige Identitäten:

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$
- $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$
- $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Partitionen zählen

Partitionen zählen

k-Partition einer *n*-elementigen Menge:

ungeordnet: $\left|\left\{\{M_1, \dots, M_k\} : M = \dot{\bigcup} M_i, M_i \neq \emptyset\right\}\right| =: S_{n.k}$

geordnet: $\left|\left\{(M_1, \dots, M_k) : M = \dot{\bigcup} M_i, M_i \neq \emptyset\right\}\right| =: T_{n.k}$

k-Partition von *n*

$n = n_1 + \cdots + n_k$

ungeordnet: (Multimenge!) $P_{n,k}$

geordnet: $\left|\left\{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k : \sum_{i=1}^{k} n_i = n\right\}\right| = \binom{n-1}{k-1}$

Partitionen zählen

Wichtige Identitäten:

- $S_{0,0} = 1, \quad P_{0,0} = 1$
- $\forall k > n: \; S_{n,k} = P_{n,k} = 0$
- $S_{n,0} = P_{n,0} = 0$
- $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$
- $T_{n,k} = k!S_{n,k}$
- $T_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \binom{k}{r} (k-r)^n$
- $S_{n,k} = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \frac{1}{r!(k-r)!} (k-r)^n$
- $P_{n+k,k} = \sum_{i=1}^{k} P_{n,i}$

Partitionen zählen

Bälle und Körbe:

n Bälle	k Körbe	beliebig	inj. $n \leq k$	surj. $n \geq k$	bij. $n = k$
unt.	unt.	k^n	$k^{\underline{n}}$	$T_{n,k}$	$n!$
ununt.	unt.	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$	1
unt.	ununt.	$\sum_{i=1}^{k} S_{n,i}$	1	$S_{n,k}$	1
ununt.	ununt.	$\sum_{i=1}^{k} P_{n,i}$	1	$P_{n,k}$	1

Erzeugende Funktionen

Erzeugende Funktionen

Gegeben:

Rekursiv definierte Folge: $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{n+1} := \varphi(a_n)$

Gesucht:

Explizite Darstellung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Aufgabe:

Sei $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie a_n.

$\Rightarrow a_n = 3^n - 2^n$

Erzeugende Funktionen

Verfahren:

1) $A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

2) Nutze Rekusionsformel und schreibe $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

   mit $g(x) = \prod_{i=1}^{k} (a_i - b_i x)^{p_i}$

3) Zerlege mit Partialbruchzerlegung: $A(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{p_i} \frac{\alpha_{ij}}{(a_i - b_i x)^j} \right)$

4) Rücktransformation der einzelnen Terme $\frac{\alpha_{ij}}{(a_i - b_i x)^j}$ in einfache Potenzreihen

5) Koeffizientenvergleich

Erzeugende Funktionen

Rechenregeln für $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$:

- $A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$
- $\forall \gamma \geq 0: \ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n x^n = \frac{1}{1-\gamma x}$ (geom. Reihe)

Rechenregeln für $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$:

- A diff'bar in $x \Rightarrow \ A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \sum_{n \geq k} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

Graphen: Definitionen und Bäume

Graphen: Definitionen und Bäume

Graph:

$G = (V, E)$ mit

$V \neq \emptyset$ endlich

$E \subseteq \binom{V}{2}$

Subgraph $H \subseteq G$:

$H = (W, F)$ mit

$W \subseteq V \quad$ und $\quad F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$

Isomorphie:

G_1, G_2 heißen isomorph

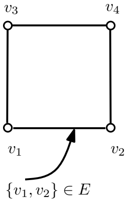
$\Leftrightarrow \exists$ bij. Abb, $f : V_1 \to V_2 \;:\; \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

Graph:

$G = (V, E)$ mit

$V \neq \emptyset$ endlich

$E \subseteq \binom{V}{2}$



Subgraph $H \subseteq G$:

$H = (W, F)$ mit

$W \subseteq V$ und $F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$

Isomorphie:

G_1, G_2 heißen isomorph

$\Leftrightarrow$ $\exists$ bij. Abb, $f : V_1 \rightarrow V_2 \; : \; \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

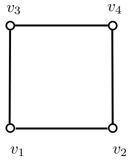
Graphen: Definitionen und Bäume

Graph:

$G = (V, E)$ mit

$V \neq \emptyset$ endlich

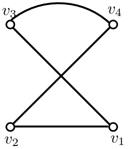
$E \subseteq \binom{V}{2}$



Subgraph $H \subseteq G$:

$H = (W, F)$ mit

$W \subseteq V \quad$ und $\quad F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$



Isomorphie:

G_1, G_2 heißen isomorph

$\Leftrightarrow \; \exists$ bij. Abb, $f : V_1 \to V_2 \; : \; \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

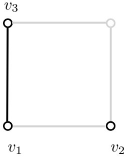
Graphen: Definitionen und Bäume

Graph:

$G = (V, E)$ mit

$V \neq \emptyset$ endlich

$E \subseteq \binom{V}{2}$



Subgraph $H \subseteq G$:

$H = (W, F)$ mit

$W \subseteq V \quad$ und $\quad F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$

Isomorphie:

G_1, G_2 heißen isomorph

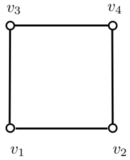
$\Leftrightarrow \exists$ bij. Abb, $f : V_1 \to V_2 \; : \; \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

Graph:

$G = (V, E)$ mit

$V \neq \emptyset$ endlich

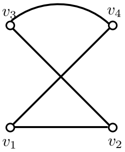
$E \subseteq \binom{V}{2}$



Subgraph $H \subseteq G$:

$H = (W, F)$ mit

$W \subseteq V$ und $F \subseteq E \cap \binom{W}{2}$



Isomorphie:

G_1, G_2 heißen isomorph

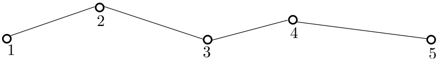
$\Leftrightarrow \exists$ bij. Abb, $f : V_1 \to V_2 \ : \ \{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2$

Bezeichnungen:

- $x, y \in V$ heißen benachbart/adjazent $:\Leftrightarrow \{x, y\} \in E$
- $x \in V$, $e \in E$ heißen inzident $:\Leftrightarrow x \in e$
- $N(x) := \{y \in V : \{x, y\} \in E\}$ heißt Nachbarschaft von x
- $\deg(x) := |N(x)|$ heißt Grad von x
- $\deg(x) = 0 \;\Leftrightarrow:\; x$ heißt isoliert
- $\deg(x) = 1 \;\Leftrightarrow:\; x$ heißt Blatt
- $\delta(G) := \min_{x \in V} \deg(x)$ heißt Minimalgrad
- $\Delta(G) := \max_{x \in V} \deg(x)$ heißt Maximalgrad

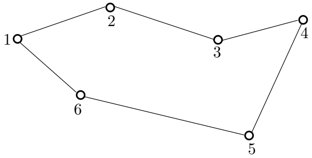
Spezielle Graphen (G isomorph zu):

- $P_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$ heißt Weg



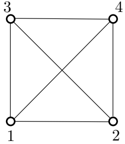
Spezielle Graphen (G isomorph zu):

- $P_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$ heißt Weg
- $C_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{n, 1\}\}$ heißt Kreis



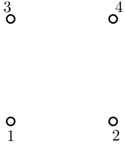
Spezielle Graphen (G isomorph zu):

- $P_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$ heißt Weg
- $C_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{n, 1\}\}$ heißt Kreis
- $K_n := ([n], \binom{[n]}{2})$ heißt n-Clique oder vollständiger Graph



Spezielle Graphen (G isomorph zu):

- $P_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$ heißt Weg
- $C_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{n, 1\}\}$ heißt Kreis
- $K_n := ([n], \binom{[n]}{2})$ heißt n-Clique oder vollständiger Graph
- $E_n := ([n], \emptyset)$ heißt n-stabile Menge oder unabhängige Menge



Graphen: Definitionen und Bäume

Spezielle Graphen (G isomorph zu):

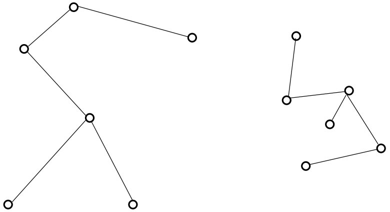
- $P_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\}$ heißt Weg
- $C_n := ([n], E)$ mit $E = \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{n, 1\}\}$ heißt Kreis
- $K_n := ([n], \binom{[n]}{2})$ heißt n-Clique oder vollständiger Graph
- $E_n := ([n], \emptyset)$ heißt n-stabile Menge oder unabhängige Menge

Graphenkonstanten:

- $\omega(G) := \max |\{H \subseteq G : H \text{ ist Clique}\}|$
- $\alpha(G) := \max |\{H \subseteq G : H \text{ ist stablie Menge}\}|$

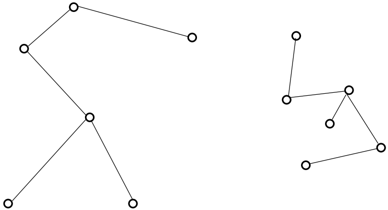
Noch mehr Bezeichnungen:

- G heißt kreisfrei/Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis als Subgraph



Noch mehr Bezeichnungen:

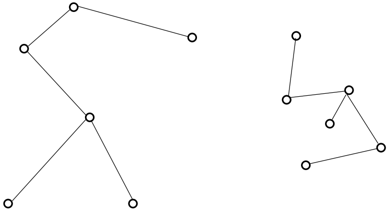
- G heißt kreisfrei/Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis als Subgraph
- G heißt zshg. $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V:\ \exists x, y$-Weg als Subgraph



Graphen: Definitionen und Bäume

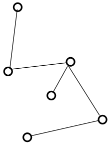
Noch mehr Bezeichnungen:

- G heißt kreisfrei/Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis als Subgraph
- G heißt zshg. $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V : \; \exists x, y$-Weg als Subgraph
- $H \subseteq G$ heißt Zshg.-Komp. $:\Leftrightarrow$ $H \subseteq G$ inklusionsmax. zshg.



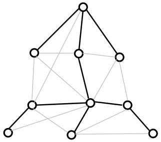
Noch mehr Bezeichnungen:

- G heißt kreisfrei/Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis als Subgraph
- G heißt zshg. $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V: \; \exists x, y$-Weg als Subgraph
- $H \subseteq G$ heißt Zshg.-Komp. $:\Leftrightarrow$ $H \subseteq G$ inklusionsmax. zshg.
- G heißt Baum $:\Leftrightarrow$ G zshg. und kreisfrei



Noch mehr Bezeichnungen:

- G heißt kreisfrei/Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis als Subgraph
- G heißt zshg. $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V:\ \exists x, y$-Weg als Subgraph
- $H \subseteq G$ heißt Zshg.-Komp. $:\Leftrightarrow$ $H \subseteq G$ inklusionsmax. zshg.
- G heißt Baum $:\Leftrightarrow$ G zshg. und kreisfrei
- Ist $B = (V, T) \subseteq G = (V, E)$ ein Baum, so heißt B Spannbaum von G.



Graphen: Definitionen und Bäume

Noch mehr Bezeichnungen:

- G heißt kreisfrei/Wald $:\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis als Subgraph
- G heißt zshg. $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V:$ $\exists x, y$-Weg als Subgraph
- $H \subseteq G$ heißt Zshg.-Komp. $:\Leftrightarrow$ $H \subseteq G$ inklusionsmax. zshg.
- G heißt Baum $:\Leftrightarrow$ G zshg. und kreisfrei
- Ist $B = (V, T) \subseteq G = (V, E)$ ein Baum, so heißt B Spannbaum von G.

Äquivalent:

G zshg.

$\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \neq \emptyset$ mit $X \dot{\cup} Y = V$ $\exists \{x, y\} \in E$ mit $x \in X$, $y \in Y$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ Spannbaum $B \subseteq G$

Graphen: Definitionen und Bäume

Einige Eigenschaften:

- G Wald $\Leftrightarrow$ Zshg.-Komp. sind Bäume
- $G = (V, E)$ Baum, $|V| \geq 2 \;\Rightarrow\;$ G enthält mind. 2 Blätter
- G Baum, x Blatt von $G \;\Rightarrow\;$ $G - x$ ist wieder Baum
- G Wald $\Rightarrow\;$ $\delta(G) \leq 1$, $\omega(G) \leq 2$

Äquivalent:

$G = (V, E)$ Baum

$\Leftrightarrow$ G zshg., $|E| = |V| - 1$

$\Leftrightarrow$ G kreisfrei, $|E| = |V| - 1$

$\Leftrightarrow$ G kantenminimal zshg.

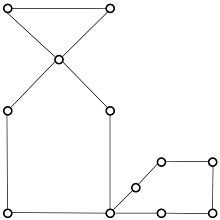
$\Leftrightarrow$ G kantenmaximal kreisfrei

$\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V \; \exists_1 \; x, y$-Weg in G

Euler-Tour:

geschlossener Kantenzug

jede Kante **genau** ein Mal



Satz:

$G = (V, E)$ ein zshg. Graph.

G hat Eulertour

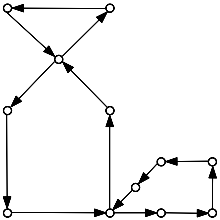
$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \deg(v) \equiv 0 \ (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow$ E lässt sich in kantendisjunkte Kreise partitionieren.

Euler-Tour:

geschlossener Kantenzug

jede Kante **genau** ein Mal



Satz:

$G = (V, E)$ ein zshg. Graph.

G hat Eulertour

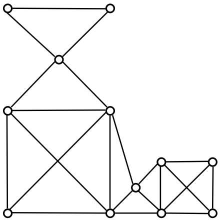
$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \ \deg(v) \equiv 0 \ (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow$ E lässt sich in kantendisjunkte Kreise partitionieren.

Euler-Tour:

geschlossener Kantenzug

jede Kante **genau** ein Mal



Satz:

$G = (V, E)$ ein zshg. Graph.

G hat Eulertour

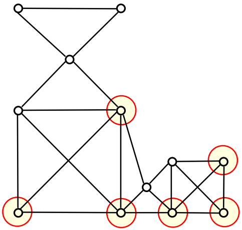
$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V : \deg(v) \equiv 0 \; (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow$ E lässt sich in kantendisjunkte Kreise partitionieren.

Euler-Tour:

geschlossener Kantenzug

jede Kante **genau** ein Mal



Satz:

$G = (V, E)$ ein zshg. Graph.

G hat Eulertour

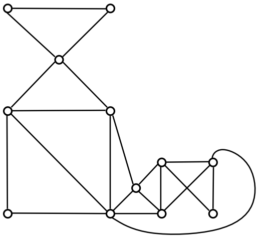
$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \; \deg(v) \equiv 0 \; (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow$ E lässt sich in kantendisjunkte Kreise partitionieren.

Euler-Tour:

geschlossener Kantenzug

jede Kante **genau** ein Mal



Satz:

$G = (V, E)$ ein zshg. Graph.

G hat Eulertour

$\Leftrightarrow$ $\forall v \in V: \ \deg(v) \equiv 0 \ (mod\ 2)$

$\Leftrightarrow$ E lässt sich in kantendisjunkte Kreise partitionieren.

Hamilton-Kreis:

Kreis der Länge $|V|$

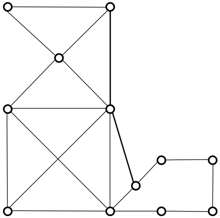
Satz:

$x, y \in V$ nicht benachbart

$\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$

$(V, E \cup \{x, y\})$ hat Hamilton-Kreis

$\Rightarrow$ $G = (V, E)$ hat Hamilton-Kreis



Korollar:

$|V| \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$

$\Rightarrow$ G hat Hamilton-Kreis

Hamilton-Kreis:

Kreis der Länge $|V|$

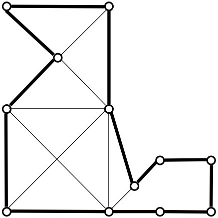
Satz:

$x, y \in V$ nicht benachbart

$\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$

$(V, E \cup \{x, y\})$ hat Hamilton-Kreis

$\Rightarrow$ $G = (V, E)$ hat Hamilton-Kreis



Korollar:

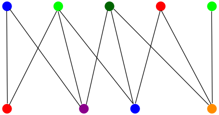
$|V| \geq 3$, $\delta(G) \geq \frac{|V|}{2}$

$\Rightarrow$ G hat Hamilton-Kreis

Graphen: Färbung und Planarität

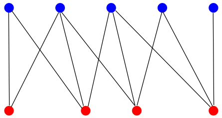
Bezichnungen:

- $f : V \to [k]$, so dass $\forall \{x, y\} \in E : \; f(x) \neq f(y)$ heißt *k*-Färbung
- G heißt *k*-färbbar, wenn eine k-Färbung von G existiert
- $\chi(G) := \min\{k : G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$ heißt chromatische Zahl
- Falls $\chi(G) \leq 2$, so heißt G bipartit



Bezichnungen:

- $f : V \to [k]$, so dass $\forall \{x, y\} \in E : \; f(x) \neq f(y)$ heißt *k*-Färbung
- G heißt *k*-färbbar, wenn eine k-Färbung von G existiert
- $\chi(G) := \min\{k : G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$ heißt chromatische Zahl
- Falls $\chi(G) \leq 2$, so heißt G bipartit



Bipartite Graphen:

- G bipartit $\Leftrightarrow$ $V = V_1 \dot\cup V_2$, $E \subseteq \{\{x,y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$
- Ist $n_1 = |V_1|, n_2 = |V_2|$ und $E = \{\{x,y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$,

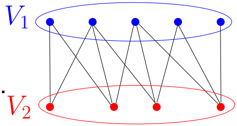
  so heißt $K_{n_1,n_2} := (V_1 \dot\cup V_2, E)$ vollständiger bipartiter Graph

Satz:

G bipartit $\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge

Bemerkung:

Wälder sind bipartit.



Bipartite Graphen:

- G bipartit $\Leftrightarrow$ $V = V_1 \dot\cup V_2,\ E \subseteq \{\{x, y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$
- Ist $n_1 = |V_1|, n_2 = |V_2|$ und $E = \{\{x, y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$,

  so heißt $K_{n_1,n_2} := (V_1 \dot\cup V_2, E)$ vollständiger bipartiter Graph

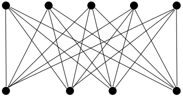
Satz:

G bipartit $\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge

Bemerkung:

Wälder sind bipartit.

$K_{5,4}$



Bipartite Graphen:

- G bipartit $\Leftrightarrow$ $V = V_1 \dot{\cup} V_2,\ E \subseteq \{\{x,y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$
- Ist $n_1 = |V_1|, n_2 = |V_2|$ und $E = \{\{x,y\} : x \in V_1, y \in V_2\}$,

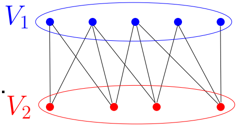
  so heißt $K_{n_1,n_2} := (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$ vollständiger bipartiter Graph

Satz:

G bipartit $\Leftrightarrow$ G enthält keinen Kreis ungerader Länge

Bemerkung:

Wälder sind bipartit.



Planarität:

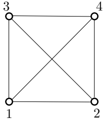
- G heißt planar $:\Leftrightarrow$ G lässt sich so in die Ebene zeichnen, dass sich Kanten nur in Knoten schneiden
- Einbettung erzeugt Gebiete R

  $G = (V, E, R)$ heißt ebener Graph $\Rightarrow$ (V, E) planar

Eulersche Polyederformel:

$G = (V, E, R)$ ebener, **zshg.** Graph

$\Rightarrow$ $|V| - |E| + |R| = 2$



Graphen: Färbung und Planarität

Planarität:

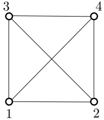
- G heißt planar $:\Leftrightarrow$ G lässt sich so in die Ebene zeichnen, dass sich Kanten nur in Knoten schneiden
- Einbettung erzeugt Gebiete R

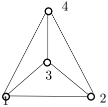
  $G = (V, E, R)$ heißt ebener Graph $\Rightarrow$ (V, E) planar

Eulersche Polyederformel:

$G = (V, E, R)$ ebener, **zshg.** Graph

$\Rightarrow$ $|V| - |E| + |R| = 2$





Graphen: Färbung und Planarität

Planarität:

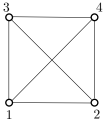
- G heißt planar $:\Leftrightarrow$ G lässt sich so in die Ebene zeichnen, dass sich Kanten nur in Knoten schneiden
- Einbettung erzeugt Gebiete R

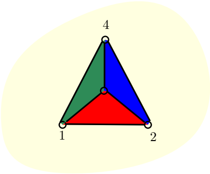
  $G = (V, E, R)$ heißt ebener Graph $\Rightarrow$ (V, E) planar

Eulersche Polyederformel:

$G = (V, E, R)$ ebener, **zshg.** Graph

$\Rightarrow$ $|V| - |E| + |R| = 2$



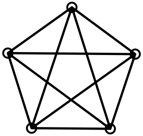


Korollar:

$G = (V, E)$ planar, $|V| \geq 3$

$\Rightarrow$ $|E| \leq 3|V| - 6 \Rightarrow$ K_5 nicht planar

$\Rightarrow$ $\delta(G) \leq 5$

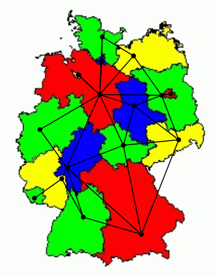


Satz:

G planar $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq 5$

Vier-Farben-Satz:

G planar $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq 4$

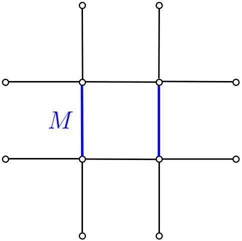


Graphen: Matchings

Graphen: Matchings

$G = (V, E)$ ein Graph:

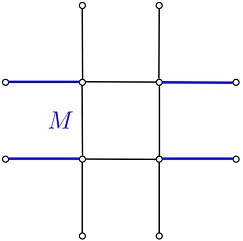
- $M \subseteq E$ heißt Matching in $G \Leftrightarrow \forall e, e' \in M: \; e \cap e' = \emptyset$
- M (inklusions-)maximales Matching $:\Leftrightarrow \forall e \in E \setminus M: \; M \cup \{e\}$ ist kein Matching
- M größtes Matching $:\Leftrightarrow \; \forall M' \subseteq E$ Matching: $|M'| \leq |M|$
- $\nu(G) := \max\{|M| : M$ Matching in $G\}$



Graphen: Matchings

$G = (V, E)$ ein Graph:

- $M \subseteq E$ heißt Matching in $G \Leftrightarrow \forall e, e' \in M: \; e \cap e' = \emptyset$
- M (inklusions-)maximales Matching $:\Leftrightarrow \forall e \in E \backslash M: \; M \cup \{e\}$ ist kein Matching
- M größtes Matching $:\Leftrightarrow \; \forall M' \subseteq E$ Matching: $|M'| \leq |M|$
- $\nu(G) := \max\{|M| : M \text{ Matching in } G\}$



Graphen: Matchings

$G = (V, E)$ ein Graph:

- $S \subseteq V$ heißt Knotenüberdeckung in $G :\Leftrightarrow \ \forall e \in E : e \cap S \neq \emptyset$
- $\tau(G) := \min\{|S| : S \text{ ist Knotenüberdeckung}\}$

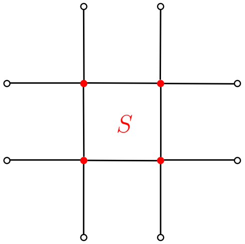
Proposition:

$$\nu(G) \leq \tau(G) \leq 2\nu(G)$$

Satz:

G bipartit

$\Rightarrow \ \nu(G) = \tau(G)$



$P = (W, F)$ ein Weg

- P heißt M-alternierend $:\Leftrightarrow$ jede zweite Kante aus M
- P heißt M-augmentierend $:\Leftrightarrow$ M-alternierend und Anfangs-/Endknoten nicht von M überdeckt

Lemma:

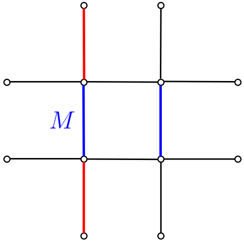
M Matching, P ein M-augm. Weg, $M' := M \Delta P$

$\Rightarrow$ $|M'| = |M| + 1$

Satz:

M größtes Matching

$\Leftrightarrow$ $\nexists$ M-augm. Weg



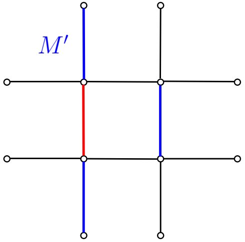
$P = (W, F)$ ein Weg

- P heißt M-alternierend $:\Leftrightarrow$ jede zweite Kante aus M
- P heißt M-augmentierend $:\Leftrightarrow$ M-alternierend und Anfangs-/Endknoten nicht von M überdeckt

Lemma:

M Matching, P ein M-augm. Weg, $M' := M \Delta P$

$\Rightarrow$ $|M'| = |M| + 1$



Satz:

M größtes Matching

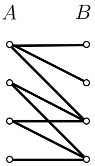
$\Leftrightarrow$ $\nexists$ M-augm. Weg

Graphen: Matchings

Bezeichnung:

M perfekt $:\Leftrightarrow$ M überdeckt alle Knoten $\Leftrightarrow |M| = \frac{|V|}{2}$

Heiratssatz von Hall:



$G = (A \dot{\cup} B, E)$ bipartit.

G hat Matching, das alle

Knoten aus A überdeckt

$\Leftrightarrow$ $\forall S \subseteq A: \; |N(S)| \geq |S|$

Korollar:

$G = (A \dot{\cup} B, E)$ bipartit.

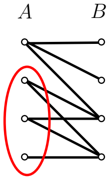
$|A| = |B|$ und $\forall S \subseteq A: \; |N(S)| \geq |S|$

$\Leftrightarrow$ G hat perfektes Matching

Bezeichnung:

M perfekt $:\Leftrightarrow$ M überdeckt alle Knoten $\Leftrightarrow |M| = \frac{|V|}{2}$

Heiratssatz von Hall:



$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

G hat Matching, das alle

Knoten aus A überdeckt

$\Leftrightarrow$ $\forall S \subseteq A: \; |N(S)| \geq |S|$

Korollar:

$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

$|A| = |B|$ und $\forall S \subseteq A: \; |N(S)| \geq |S|$

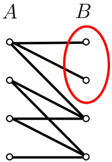
$\Leftrightarrow$ G hat perfektes Matching

Graphen: Matchings

Bezeichnung:

M perfekt $:\Leftrightarrow$ M überdeckt alle Knoten $\Leftrightarrow |M| = \frac{|V|}{2}$

Heiratssatz von Hall:



$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

G hat Matching, das alle

Knoten aus A überdeckt

$\Leftrightarrow$ $\forall S \subseteq A : \ |N(S)| \geq |S|$

Korollar:

$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

$|A| = |B|$ und $\forall S \subseteq A : \ |N(S)| \geq |S|$

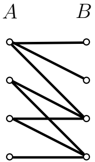
$\Leftrightarrow$ G hat perfektes Matching

Graphen: Matchings

Bezeichnung:

M perfekt $:\Leftrightarrow$ M überdeckt alle Knoten $\Leftrightarrow |M| = \frac{|V|}{2}$

Heiratssatz von Hall:



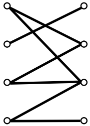
$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

G hat Matching, das alle

Knoten aus A überdeckt

$\Leftrightarrow$ $\forall S \subseteq A: \ |N(S)| \geq |S|$

Korollar:



$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

$|A| = |B|$ und $\forall S \subseteq A: \ |N(S)| \geq |S|$

$\Leftrightarrow$ G hat perfektes Matching

Graphen: Matchings

Bezeichnung:

M perfekt $:\Leftrightarrow$ M überdeckt alle Knoten $\Leftrightarrow |M| = \frac{|V|}{2}$

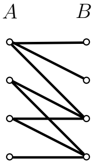
Heiratssatz von Hall:

$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

G hat Matching, das alle

Knoten aus A überdeckt

$\Leftrightarrow$ $\forall S \subseteq A: \; |N(S)| \geq |S|$

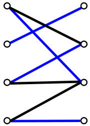


Korollar:

$G = (A \dot\cup B, E)$ bipartit.

$|A| = |B|$ und $\forall S \subseteq A: \; |N(S)| \geq |S|$

$\Leftrightarrow$ G hat perfektes Matching



Literatur

- M. Aigner: Diskrete Mathematik, 6. Auflage, Vieweg 2006.
- J. Matoušek, J. Nešetřil: Diskrete Mathematik: Eine Entdeckungsreise, 2. Auflage, Springer 2007.
- A. Steger: Diskrete Strukturen, Springer 2001.