Technische Universität München

Zentrum Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Weihnachtsblatt

Aufgabe W.1

Untersuchen Sie nachstehenden "*Beweis*":

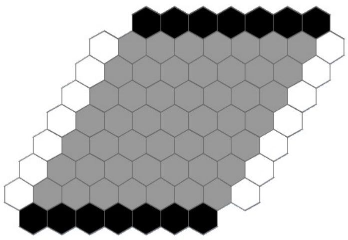
Ist R eine symmetrische und transitive binäre Relation auf einer Menge M, dann folgt für $a,b \in M$ mit $a \sim_R b$ wegen der Symmetrie auch $b \sim_R a$ und wegen der Transitivität aus $a \sim_R b$ und $b \sim_R a$ auch $a \sim_R a$. Die Relation R ist also eine Äquivalenzrelation.

Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage an und erklären Sie, weshalb die Argumentation fehlerhaft ist.

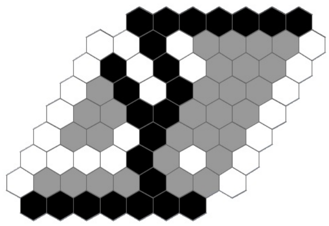
Aufgabe W.2 *

Hex wird auf einem rautenförmigen Spielbrett B gespielt (siehe Abbildung). Die Randfelder links und rechts sind weiß, die unten und oben schwarz. Die eigentlichen Spielfelder sind zunächst grau. Im Spiel färben die Spieler abwechselnd je ein noch graues Feld weiß beziehungsweise schwarz. Gewonnen hat, wer zuerst einen durchgehenden Weg in seiner Farbe zwischen den Seiten seiner Farbe erzeugt hat.

Das Spielbrett:



Schwarz gewinnt:



Das Spiel endet unentschieden, falls alle Felder schwarz oder weiß gefärbt sind und keiner der Spieler gewonnen hat. Ziel der Aufgabe ist es zu beweisen, dass dies nicht auftritt. Dazu nehmen wir an, dass B vollständig gefärbt ist und konstruieren folgende Neufärbung von B: Alle Felder die schwarz sind und vom unteren Rand über schwarze Felder erreichbar sind, färben wir rot. Alle Felder, die weiß sind und vom linken Rand über weiße Felder erreichbar sind, färben wir grün. Alle übrigen Felder färben wir blau. Außerdem konstruieren wir für die Ecken V und die Kanten K der Sechseck-Felder von B folgende Menge $R \subseteq V \times K$: Für $v \in V$ und $k \in K$ gelte $(v,k) \in R$ genau dann, wenn v Endpunkt von k ist *und* k zwischen einem roten und einem grünen Feld verläuft. (Vergleichen Sie zu dieser Aufgabe auch das auf der Vorlesungshomepage verlinkte Applet.)

a) Zeigen Sie, dass für jede Kante $k \in K$ gilt, dass $|\{v \in V : (v,k) \in R\}|$ gerade ist.

b) Zeigen Sie, dass es bei einem Unentschieden genau eine Ecke $v \in V$ gibt, für die $|\{k \in K : (v,k) \in R\}|$ ungerade ist.

c) Schlussfolgern Sie, dass ein Unentschieden bei Hex nicht auftreten kann.

Bitte wenden!

Aufgabe W.3 *(Aus dem Bundeswettbewerb Mathematik)*
Gesucht sind Färbungen $f : \mathbb{N} \to \{\text{rot}, \text{grün}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener roter Zahlen ist eine rote Zahl.
- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.
- Es gibt sowohl rote als auch grüne Zahlen.

Man finde alle derartigen Färbungen. Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Aufgabe W.4
Zeigen Sie, dass für beliebige Graphen $G = (V, E)$ gilt:

a) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

b) $\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$

Finden Sie zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ mit $|V_n| \geq n$, für den in dieser Ungleichung Gleichheit gilt sowie für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Graphen $G_k = (V_k, E_k)$, so dass $\frac{|V_k|}{\alpha(G_k)} = 2$ und $\chi(G_k) = k$.

c) $\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \Delta(G) + 1$

Verwenden Sie hierzu nicht die Ergebnisse aus a) und b) sondern betrachten Sie eine maximale stabile Menge und ihre Nachbarschaft.

Aufgabe W.5 *
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Kreis der Länge $|V|$ in G heißt *Hamilton–Kreis.*

a) Zeigen Sie den folgenden Satz von Ore:

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $x, y \in V$ zwei nicht benachbarte Knoten mit $\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$. *Wenn $G' := (V, E \cup \{x, y\})$ einen Hamilton-Kreis besitzt, so besitzt auch G einen Hamilton-Kreis.*

b) Folgern Sie aus a): Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und $\delta(G) \geq |V|/2$ hat einen Hamiltonkreis.

c) Konstruieren Sie einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 1001$ und $\delta(G) = 500$, der keinen Hamiltonkreis hat.

Hinweise zum Übungsbetrieb in der der Zeit vom 21.12.2009 bis 10.01.2010

- Für die Zeit vom 21.12.2009 bis 10.01.2010 gibt es dieses Weihnachtsblatt. Die Aufgaben auf diesem Blatt werden nicht korrigiert, stattdessen stellen wir eine Musterlösung auf der Homepage bereit.
- In diesem Zeitraum finden auch keine regulären Übungen statt. Stattdessen steht Ihnen Ihr Tutor zum Termin Ihrer regulären Übung für Fragen (zum Weihnachtsblatt) zur Verfügung.
- In der Woche vom 11.01.2010 werden die Übungen normal mit Blatt 5 fortgesetzt. (Ungerade Gruppen starten also in der Woche vom 11.01. ins neue Jahr, die geraden Gruppen in der Woche vom 18.01.)

Das Team des Propädeutikums Diskrete Mathematik wünscht Ihnen ein frohes Fest, erholsame Ferien und einen guten Start ins neue Jahr!