Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl-Math. A. Würfl, Dipl-Math. S. König

Weihnachtsblatt

Aufgabe W.1

Untersuchen Sie nachstehenden "*Beweis*":

Ist R eine symmetrische und transitive binäre Relation auf einer Menge M, dann folgt für a,b $\in M$ mit $a \sim_R b$ wegen der Symmetrie auch $b \sim_R a$ und wegen der Transitivität aus $a \sim_R b$ und $b \sim_R a$ auch $a \sim_R a$. Die Relation R ist also eine Äquivalenzrelation.

Geben Sie ein Gegenbeispiel zu dieser Aussage an und erklären Sie, weshalb die Argumentation fehlerhaft ist.

Lösung zu Aufgabe W.1

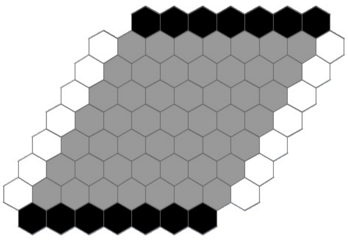
Es sei $M := \{1, 2, 3\}$ und $R := \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$. Dann ist R offensichtlich symmetrisch und transitiv, aber, da $(1, 1) \notin R$, nicht reflexiv.

Der Beweis ist falsch, da kein $b \in M$ existiert, so dass $(1, b) \in R$. Der Schluss, dass $(1, b), (b, 1) \in R$ auf Grund der Symmetrie und damit durch die Transitivität auch $(1, 1) \in R$, klappt also nicht.

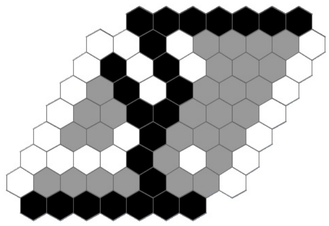
Aufgabe W.2 *

Hex wird auf einem rautenförmigen Spielbrett B gespielt (siehe Abbildung). Die Randfelder links und rechts sind weiß, die unten und oben schwarz. Die eigentlichen Spielfelder sind zunächst grau. Im Spiel färben die Spieler abwechselnd je ein noch graues Feld weiß beziehungsweise schwarz. Gewonnen hat, wer zuerst einen durchgehenden Weg in seiner Farbe zwischen den Seiten seiner Farbe erzeugt hat.

Das Spielbrett:



Schwarz gewinnt:



Das Spiel endet unentschieden, falls alle Felder schwarz oder weiß gefärbt sind und keiner der Spieler gewonnen hat. Ziel der Aufgabe ist es zu beweisen, dass dies nicht auftritt. Dazu nehmen wir an, dass B vollständig gefärbt ist und konstruieren folgende Neufärbung von B: Alle Felder die schwarz sind und vom unteren Rand über schwarze Felder erreichbar sind, färben wir rot. Alle Felder, die weiß sind und vom linken Rand über weiße Felder erreichbar sind, färben wir grün. Alle übrigen Felder färben wir blau. Außerdem konstruieren wir für die Ecken V und die Kanten K der Sechseck-Felder von B folgende Menge $R \subseteq V \times K$: Für $v \in V$ und $k \in K$ gelte $(v, k) \in R$ genau dann, wenn v Endpunkt von k ist *und* k zwischen einem roten und einem grünen Feld verläuft. (Vergleichen Sie zu dieser Aufgabe auch das auf der Vorlesungshomepage verlinkte Applet.)

a) Zeigen Sie, dass für jede Kante $k \in K$ gilt, dass $|\{v \in V : (v, k) \in R\}|$ gerade ist.

b) Zeigen Sie, dass es bei einem Unentschieden genau eine Ecke $v \in V$ gibt, für die $|\{k \in K : (v, k) \in R\}|$ ungerade ist.

c) Schlussfolgern Sie, dass ein Unentschieden bei Hex nicht auftreten kann.

Lösung zu Aufgabe W.2

a) Es ist $|\{v \in V : (v, k) \in R\}| = |\{v \in V : v$ ist Endpunkt der Kante k und k verläuft zwischen rotem und grünem Feld$\}| \in \{0, 2\}$. (0, wenn die zweite Bedingung nicht erfüllt ist, 2 sonst.)

b) Unterscheide „innere Ecken", die zwischen 3 Feldern aus B liegen und „Randecken", die nur zwischen 2 Feldern aus B liegen. (Bemerke: Es gibt genau 6 Randecken.)
Für die Randecken gilt nun:
Die Kante an der Ecke v_1 unten links verläuft zwischen einem roten und einem grünen Feld, also: $(v_1, k_1) \in R$. Damit ist v_1 eine Ecke, für die $|\{k \in K : (v_1, k) \in R\}| = 1$ ungerade ist. Wenn das Spiel unentschieden endet, kann das Spielfeld unten rechts nicht grün gefärbt sein, da sonst weiß gewonnen hätte. Genauso kann die das Spielfeld links oben nicht rot gefärbt sein. Für die vier zu diesen Feldern gehörenden Randecken $v_2, \dots, v_5$ gilt also $|\{k \in K : (v_i, k) \in R\}| = 0$. Die Kante zwischen den beiden Feldern rechts oben muss schließlich auch zwischen zwei blauen Feldern verlaufen, da sonst eine Farbe gewonnen hätte. Also gilt für Ecke v_6 ganz rechts oben auch : $(v_6, k) \notin R \; \forall \; k \in K$.

Abbildung 1: Die Abbildung zeigt in dieser Reihenfolge mögliche Ausschnitte des neu gefärbten Spielfelds bei Unentschieden: links unten, rechts unten, links oben, rechts oben.

Für die inneren Ecken gilt:
Wir unterscheiden fünf denkbare Fälle, die an einer inneren Ecke v auftreten können:

(1) Alle angrenzenden Felder sind rot oder blau. Dann gilt $(v, k) \notin R \; \forall \; k \in K$.
(2) Alle angrenzenden Felder sind grün oder blau. Hier gilt genauso $(v, k) \notin R \; \forall \; k \in K$.
(3) Zwei Felder sind rot und eines grün. Dann gilt $|\{k \in K : (v, k) \in R\}| = 2$.
(4) Zwei Felder sind grün und eines rot. Hier gilt natürlich genauso $|\{k \in K : (v, k) \in R\}| = 2$.
(5) Jedes Feld hat eine andere Farbe. Dann gilt $|\{k \in K : (v, k) \in R\}| = 1$. Dieser Fall ist jedoch nicht möglich, denn das blaue Feld ist ja von einem der beiden Spieler schwarz bzw. weiß gefärbt worden. Da es über das rote bzw. grüne vom unteren bzw. linken Rand erreichbar ist, ist es also auf keinen Fall blau.

Insgesamt gibt es also genau eine Ecke (nämlich v_1), für die $|\{k \in K : (v, k) \in R\}| = 1$ ist.

c) Doppeltes Abzählen liefert:
$$|R| = \underbrace{\sum_{v \in V} \underbrace{|\{k \in K : (v, k) \in R\}|}_{\text{genau einmal ungerade}}}_{\text{ungerade}} = \underbrace{\sum_{k \in K} \underbrace{|\{v \in V : (v, k) \in R\}|}_{\in\{0,2\}}}_{\text{gerade}}$$
Damit ergibt sich (unter der Annahme „Unentschieden") ein Widerspruch.

Aufgabe W.3 *(Aus dem Bundeswettbewerb Mathematik)*
Gesucht sind Färbungen $f : \mathbb{N} \to \{\text{rot, grün}\}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener roter Zahlen ist eine rote Zahl.
- Die Summe dreier nicht notwendig verschiedener grüner Zahlen ist eine grüne Zahl.
- Es gibt sowohl rote als auch grüne Zahlen.

Man finde alle derartigen Färbungen. Die Richtigkeit des Resultates ist zu beweisen.

Lösung zu Aufgabe W.3
Siehe Wettbewerb 2007/1, Aufgabe 2 oder:

Sei $f : \mathbb{N} \to \{\text{rot, grün}\}$ eine Färbung und sei o.B.d.A. $f(1) = \text{rot}$. Wir zeigen zuerst folgende Hilfsaussage:

Ist $f(n) = \text{rot}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$: $f(n + 2k) = \text{rot}$.

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang ($k = 0$): Die Aussage gilt nach Voraussetzung.
Induktionsschritt ($k \to k+1$): Da $f(1) = \text{rot}$ und $f(n+2k) = \text{rot}$ nach Induktionsvoraussetzung, ist als Summe dreier roter Zahlen also auch $f(n + 2(k + 1)) = f((n + 2k) + 1 + 1) = \text{rot}$.
Mit der Hilfsaussage folgt augenblicklich:

a) Alle ungeraden Zahlen sind rot.

b) Wenn es eine gerade rote Zahl n gibt, so sind auch alle geraden Zahlen, die größer als n sind, rot.

Angenommen es gäbe nun mindestens eine gerade rote Zahl. Sei n die kleinste gerade rote Zahl. Es ist $n \geq 4$, da sonst alle Zahlen rot wären. Dann ist $f(n - 2) = \text{grün}$, und damit gilt auch $f(3(n - 2)) = f(3n - 6) = \text{grün}$. Da $3n - 6 \geq n$ und $f(n) = \text{rot}$ ist, ist dies ein Widerspruch zu b).

Es gibt also nur zwei Färbungen, die jeweils alle geraden und alle ungeraden Zahlen mit der gleichen Farbe versehen.

Aufgabe W.4
Zeigen Sie, dass für beliebige Graphen $G = (V, E)$ gilt:

a) $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

b) $\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$

Finden Sie zusätzlich für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Graphen $G_n = (V_n, E_n)$ mit $|V_n| \geq n$, für den in dieser Ungleichung Gleichheit gilt sowie für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Graphen $G_k = (V_k, E_k)$, so dass $\frac{|V_k|}{\alpha(G_k)} = 2$ und $\chi(G_k) = k$.

c) $\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \Delta(G) + 1$

Verwenden Sie hierzu nicht die Ergebnisse aus a) und b) sondern betrachten Sie eine maximale stabile Menge und ihre Nachbarschaft.

Lösung zu Aufgabe W.4

a) Dass $\omega(G) \leq \chi(G)$ gilt, ist klar da jeder Knoten einer Clique eine eigene Farbklasse benötigt.

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$: Wir färben G mit folgendem Verfahren: Wir wählen einen noch ungefärbten Knoten $v \in V$ und färben ihn mit niedrigsten Farbe, die von keinem seiner Nachbarn benutzt wird. Da v höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn hat, kann v also immer mit einer der ersten $\Delta(G)+1$ Farben gefärbt werden.

b) Eine einfarbige Menge von Knoten muss stabil sein, d.h. zu jeder der $\chi(G)$ Farben gibt es höchstens $\alpha(G)$ Knoten von dieser Farbe. Damit folgt die behauptete Ungleichung $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$.

Um die Ungleichung mit Gleichheit zu erfüllen kann man zum Beispiel einen Clique auf n Knoten wählen, also $G_n = K_n$. Dann gilt $\alpha(G_n) = 1$ und $\chi(G_n) = |V_n| = n$.

Für die zweite verlangte Familie von Graphen betrachten wir einen Graphen $G_k = (V_k, E_k)$ mit Knotenmenge $V_k = \{1, \ldots, 2k\}$ und setzen $E_k := \binom{[k]}{2} \cup \{\{i, i+k\} : i = 1, \ldots, k\}$. Das heißt G_k besteht aus einer Clique der Größe k, bei der an jedem Knoten noch ein einzelnes Blatt hängt. Um die Knoten $\{1, \ldots, k\}$ zu färben benötigen wir k Farben. Da die Knoten $\{k+1, \ldots, 2k\}$ jeweils nur genau einen Nachbarn (unter den bereits gefärbten Knoten) haben, genügen die k Farben um alle Knoten zu färben. Also ist $\chi(G) = k$. Schließlich bilden die Knoten $\{k+1, \ldots, 2k\}$ eine größte stabile Menge der Größe k in G_k und damit ist $\frac{|V_k|}{\alpha(G_k)} = 2$ wie gefordert.

c) Die Ungleichung $\frac{|V|}{\alpha(G)} \leq \Delta(G) + 1$ folgt aus der Betrachtung einer maximalen stabilen Menge S und der Tatsache, dass alle Knoten in $V \setminus S$ in der Nachbarschaft $\bigcup_{s \in S} N(s)$ von S liegen müssen (sonst ist S nicht maximal stabil). Es gilt also

$$|V| = |S \cup \bigcup_{s \in S} N(s)| = |S| + |\bigcup_{s \in S} N(s)| \leq \alpha(S) + \alpha(G)\Delta(G) \; .$$

Aufgabe W.5 *

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Kreis der Länge $|V|$ in G heißt *Hamilton–Kreis.*

a) Zeigen Sie den folgenden Satz von Ore:

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $x, y \in V$ zwei nicht benachbarte Knoten mit $\deg(x) + \deg(y) \geq |V|$. Wenn $G' := (V, E \cup \{x, y\})$ einen Hamilton-Kreis besitzt, so besitzt auch G einen Hamilton-Kreis.

b) Folgern Sie aus a): Jeder Graph $G = (V, E)$ mit $|V| \geq 3$ und $\delta(G) \geq |V|/2$ hat einen Hamiltonkreis.

c) Konstruieren Sie einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| = 1001$ und $\delta(G) = 500$, der keinen Hamiltonkreis hat.

Lösung zu Aufgabe W.5

a) Es sei $C = (V, F)$ ein Hamilton-Kreis in G' und $n := |V|$. Wenn $\{x, y\} \notin F$, dann ist C auch Subgraph von G, und damit hat auch G einen Hamilton-Kreis und wir sind fertig. Wir betracheten also nur noch den Fall, dass $\{x, y\} \in F$, und bezeichnen die Knoten von G' mit $x, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, y$

in der Reihenfolge, in der sie auf C liegen.
Die Idee unseres Beweises ist die folgende: Wenn für ein $i \in [n-3]$ gilt, dass $\{y, v_i\} \in E$ und $\{x, v_{i+1}\} \in E$, dann existiert in G ein Hamilton-Kreis

$$C' = (V, F \setminus (\{x,y\} \cup \{v_i, v_{i+1}\}) \cup \{y, v_i\} \cup \{x, v_{i+1}\}),$$

der die Kante $\{x,y\}$ nicht benutzt, und wir sind fertig (vgl. Abb. 2).

Abbildung 2: Der Hamilton-Kreis C und der Hamilton-Kreis C', der die Kante $\{x,y\}$ nicht mehr benutzt.

Wir betrachten also diejenigen Nachbarn von y, die in der Menge $\{v_1, \ldots, v_{n-3}\}$ liegen. Das sind $\deg(y) - 1$ viele. Markiere für jeden solchen Nachbarn v_i den Nachfolger v_{i+1} auf C rot. Damit sind $\deg(y) - 1$ Knoten in der Menge $\{v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ rot markiert und wir wollen zeigen, dass x mindestens einen Nachbarn unter diesen roten Knoten hat. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann bleiben für die Nachbarn von x, die in der Menge $\{v_2, \ldots, v_{n-2}\}$ liegen, nur $n-3-(\deg(y)-1) = n-2-\deg(y)$ Plätze frei. Da aber x noch mindestens $\deg(x) - 1$ Nachbarn in genau dieser Menge unterbringen muss, folgt

$$\deg(x) - 1 \leq n - 2 - \deg(y),$$

was gleichbedeutend mit $\deg(x) + \deg(y) \leq n - 1 = |V| - 1$ ist und damit einen Widerspruch zur Vorraussetzung darstellt.

b) Folgt direkt aus a), da für je zwei (beliebige, also insb. nicht benachbarte) Knoten aus E gilt:

$$\deg(x) + \deg(x) \geq 2\delta(G) \geq 2 \cdot |V|/2 = |V|$$

Also kann G durch Hinzufügen von Kanten zu einem vollständigen Graphen $K_{|V|}$ ergänzt werden. Da $K_{|V|}$ offensichtlich einen Hamiltonkreis hat, enthält auch G nach mehrmaligen Anwenden des Satzes von Ore einen Hamiltonkreis.

c) Konstruiere G als vollständigen bipartiten Graphen auf Partitionen mit 500 und 501 Knoten. Da G keinen Kreis ungerader Länge besitzt, hat G dann auch keinen Hamiltonkreis.
Alternativ: Wähle als G einen Graph, der aus zwei Cliquen auf jeweils 501 Knoten besteht, die sich genau einen Knoten teilen. Dieser Knoten müsste im Hamiltonkreis doppelt auftauchen.