Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Propädeutikum Diskrete Mathematik

Prof. Dr. A. Taraz, Dipl.-Math. A. Würfl, Dipl.-Math. S. König

Klausurvorbereitung

Die Klausur zum Propädeutikum Diskrete Mathematik findet am **Mittwoch**, den **24.2.10** um **9:30 Uhr** in den Hörsälen **MW 0001** und **MW 1801** statt. Zur Klausur sind keine Hilfsmittel außer Schreibzeug (insbesondere keinerlei Taschenrechner o.ä.) zugelassen. Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis mit.

Auf diesem Blatt finden Sie Aufgaben, deren Schwierigkeitsgrad in etwa den in der Klausur gestellten Aufgaben entspricht. Der Umfang einer einzelnen Klausur kann dabei in etwa durch die Aufgaben 1 bis 6 abgeschätzt werden.

Am Donnerstag, den **18. Februar** findet ein eintägiger Wiederholungskurs statt. Ort und genaue Zeit finden Sie auf der Vorlesungshomepage. Im Rahmen dieses Wiederholungskurses werden wir wichtige Inhalte der Vorlesung wiederholen und eine Auswahl der Aufgaben dieses Blattes besprechen. Darüber, welche Aufgaben Sie besonders gerne sehen würden, können Sie ab sofort auf der Vorlesungshomepage abstimmen.

Aufgabe K.1

Betrachten Sie die Rekursion $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot 2^n$ für alle $n \geq 0$ mit $a_0 = 0$.

a) Zeigen Sie, dass für $A(x) := \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ gilt

$$A(x) = \frac{4x}{(1-3x)(1-2x)}.$$

b) Bestimmen Sie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{4x}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{\alpha}{1-3x} - \frac{\beta}{1-2x}.$$

c) Leiten Sie daraus eine explizite Formel für a_n ab.

Aufgabe K.2

a) Bei einer Wahl geben 101 Personen jeweils eine Stimme für einen von *vier* Kandidaten ab. Wieviele mögliche Wahlausgänge gibt es?

b) Bei einer Wahl geben 101 Personen jeweils eine Stimme für einen von *drei* Kandidaten ab. Wieviele mögliche Wahlausgänge gibt es, bei denen *keiner* der Kandidaten mehr als 50 Stimmen erhält?

   Hinweis: Hierbei ist die Lösung von a) nicht von Nutzen. Betrachten Sie stattdessen, wieviele Stimmen der zweite Kandidat bekommen kann, falls der erste i Stimmen erhält.

Bitte wenden!

Aufgabe K.3

In einem Graphen G habe eine *größte* stabile Menge genau l Knoten. Außerdem besitze jeder Knoten von G höchstens k Nachbarn. Beweisen Sie, dass G höchstens $l(k+1)$ Knoten hat.

Aufgabe K.4

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Bei dieser Aufgabe müssen die Antworten nicht begründet werden.

Pro Teilaufgabe erhalten sie bei richtiger Antwort 1*, bei fehlender Antwort* 0 *und bei falscher Antwort* -1 *Punkte. Eine negative Gesamtpunktzahl ist möglich.*

$G = (V, E)$ sei ein Graph, M_1 und M_2 seien Matchings in G mit $|M_2| = |M_1| + 2$.

(i) Jeder Pfad im Graphen $G' := (V, M_1 \triangle M_2)$ ist ein M_1-augmentierender Pfad.

(ii) Es gibt immer *mindestens zwei* M_1-augmentierende Pfade in G.

(iii) Es gibt immer *genau zwei* M_1-augmentierende Pfade in G.

Aufgabe K.5

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X := [n]$. Im Folgenden betrachten wir das Poset $P = (\mathcal{P}(X), \preceq)$ mit $A \preceq B$ genau dann wenn $A \subseteq B$ für $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

a) Stellen Sie für $n = 3$ das Hassediagramm für P dar.

b) Sei $A = [k]$. Wieviele längste Ketten gibt es in P, die A enthalten?

Aufgabe K.6

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit n Knoten.

a) Sei $S \subset V$ mit $S \neq V$ beliebig, sodass $G[S]$ zusammenhängend ist. Zeigen Sie, dass es dann ein $x \in V \setminus S$ gibt, sodass $G[S \cup \{x\}]$ zusammenhängend ist.

b) Folgern Sie aus (a), dass V so als $v_1, v_2, \ldots, v_n$ geordnet werden kann, dass für alle $V_i := \{v_1, \ldots, v_i\}$ mit $i \in [n]$ der Graph $G[V_i]$ zusammenhängend ist.

Aufgabe K.7
Gegeben sei die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = 2a_n + \frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ mit Startwert $a_0 = 0$. Zeigen Sie, dass für die erzeugende Funktion $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ gilt

$$A(x) = \frac{x}{(1-2x)(1-x)^3}.$$

Verwenden Sie dafür, dass $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe K.8
Geben Sie ohne Begründungen an:

a) Seien M_1, M_2, M_3 beliebige endliche Mengen. Laut Inklusion-Exklusion-Formel gilt für $|M_1 \cup M_2 \cup M_3|$:

b) Sei M eine endliche, nicht-leere Menge und $R = (M, \preceq)$ eine partielle Ordnung. Dann ist die Kardinalität einer längsten Kette in R gleich

Aufgabe K.9
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Bei dieser Aufgabe müssen die Antworten nicht begründet werden.

Pro Teilaufgabe erhalten sie bei richtiger Antwort 1*, bei fehlender Antwort* 0 *und bei falscher Antwort* -1 *Punkte. Eine negative Gesamtpunktzahl ist möglich.*

(i) Es gibt $\binom{n}{5}$ Möglichkeiten, eine Tüte mit n Gummibären von 5 Farben zu füllen, sodass alle Farben in der Tüte vorkommen.

(ii) Zu füllen ist wiederum eine Tüte mit n Gummibären von 5 Farben. Sei x die Anzahl der Möglichkeiten, dies so zu tun, dass die Tüte *höchstens* 2 Farben enthält und y die Anzahl der Möglichkeiten, dies so zu tun, dass die Tüte *mindestens* 2 Farben enthält. Dann ist $x + y$ gleich der Anzahl *aller* Möglichkeiten, die Tüte mit n Gummibären zu füllen.

(iii) Es gibt $\binom{13}{10}\binom{8}{5}$ Möglichkeiten, 10 rote und 5 grüne Gummibären (evtl. ungerecht) auf Lisa, Knut, Theo und Mandy aufzuteilen.

(iv) Ein Graph, der keinen *induzierten* Kreis ungerader Länge enthält, ist stets 2-färbbar.

Aufgabe K.10
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Blatt in G, d.h. $\deg(v) = 1$. Sei G' der Graph, der aus G entsteht, wenn das Blatt v und die zugehörige Kante entfernt werden.

Beweisen Sie: G ist Baum, genau dann wenn G' ein Baum ist.

Aufgabe K.11
Zeigen Sie:

a) Sei A eine endliche, nichtleere Menge. Dann gibt es keine surjektive Abbildung von A nach $\mathcal{P}(A)$.

b) Es gibt zusammenhängende Graphen mit Minimalgrad 2, die weder eine Eulertour, noch einen Hamiltonkreis besitzen.

c) Es gibt $7!\binom{8}{5}5!$ Möglichkeiten, sieben (unterscheidbare) Frauen und fünf (unterscheidbare) Männer so in eine Reihe zu stellen, dass keine zwei Männer nebeneinander stehen.

Aufgabe K.12
Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = n$. Es gebe $k \in [n]$ und eine Nummerierung $v_1, \ldots, v_n$ der Knoten, sodass für alle $i \in [n]$ gilt: Der Knoten v_i hat im Graphen $G[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ Grad höchstens k.

Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq k + 1$.

Aufgabe K.13
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Bei dieser Aufgabe müssen die Antworten nicht begründet werden.

Pro Teilaufgabe erhalten sie bei richtiger Antwort 1*, bei fehlender Antwort* 0 *und bei falscher Antwort* -1 *Punkte. Eine negative Gesamtpunktzahl ist möglich.*

(i) Jeder bipartite Graph $G = (V, E)$ mit $|E| \geq 1$ hat chromatische Zahl 2.

(ii) Eine asymetrische Relation ist auch antisymmetrisch.

(iii) Es gibt für das Nobelrestaurant Combinatorial Oasis $7!S_{n,7}$ Möglichkeiten, n Menüs so auf eine Woche zu verteilen, dass jeden Tag mindestens ein Menü angeboten wird.

(iv) Es gibt $n^{\underline{n-1}}$ bijektive Abbildungen von $[n]$ nach $[n]$.

Aufgabe K.14
Geben Sie ohne Begründungen an:

a) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in einem bipartiten Graphen $G = (A \cup B, E)$, ein Matching existiert, welches alle Knoten aus A überdeckt.

b) Die maximale Kardinalität einer Antikette in der partiellen Ordnung $(\mathcal{P}([n]), \subseteq)$.

Aufgabe K.15
Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten, der keine 3-Clique K_3 als Subgraphen enthält. Zeigen Sie, dass dann $m \leq \frac{1}{4}n^2$. *Hinweis*: Führen Sie dazu eine Induktion über n aus, entfernen Sie im Induktionsschritt zwei benachbarte Knoten x und y aus G, und überlegen Sie dann, ob einer der verbleibenden Knoten sowohl zu x als auch zu y benachbart gewesen sein kann.

Aufgabe K.16
Begründen Sie:

Sei G ein Graph der aus dem K_{42} durch Löschen eines beliebigen perfekten Matchings entsteht. Dann (gilt / gilt nicht), dass G eine Eulertour hat.

Aufgabe K.17
Füllen Sie die folgenden Lücken ohne Angabe einer Begründung.

a) Die Anzahl der Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\boxed{}$.

b) Der vollständige Graph auf $2n$ Knoten K_{2n} hat $\boxed{}$ viele perfekte Matchings.

c) Es gibt $\boxed{}$ Zahlen in [1000], die durch 2 oder 5 teilbar sind.
Hinweis: Inklusion-Exklusion.

d) Es gibt $\boxed{}$ viele Möglichkeiten, 60 Punkte so auf 5 Aufgaben zu verteilen, dass Aufgabe i mindestens i Punkte erhält.

Aufgabe K.18
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Bei dieser Aufgabe müssen die Antworten nicht begründet werden.

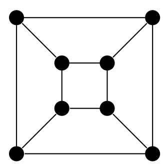
Pro Teilaufgabe erhalten sie bei richtiger Antwort 1, bei fehlender Antwort 0 und bei falscher Antwort −1 Punkte. Eine negative Gesamtpunktzahl ist möglich.

(i) Sei G ein Graph, M ein Matching in G und P ein M-augmentierender Pfad. Sei M' das Matching, das aus M durch augmentieren entlang P entsteht und P' ein M'-augmentierender Pfad. Dann gilt stets $P \not\subset P'$.

(ii) Sei G ein Graph der aus dem Graphen K_n durch Entfernen der Kanten eines beliebigen Kreises entsteht. Falls $n \geq 6$, so besitzt G einen Hamilton Kreis.

(iii) Es gibt weniger geordnete 7-Partitionen der Zahl 10 als Teilmengen der Größe 7 von [10].

(iv) Der dargestellte Graph hat chromatische Zahl 3.



Aufgabe K.19
Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph mit n Knoten, m Kanten und g Gebieten, der aus k Zusammenhangskomponenten $G_1, \ldots, G_k$ besteht. Beweisen Sie mittels Induktion über k, dass $n - m + g = k + 1$ gilt.

Bitte wenden!

Aufgabe K.20
Füllen Sie die folgenden Lücken ohne Angabe einer Begründung.

(i) Beim Würfeln mit zwei roten und einem blauen Würfel gibt es $\boxed{}$ unterschiedliche Würfelausgänge.

(ii) Es gibt $\boxed{}$ Möglichkeiten, 32 Karten auf 3 Spieler so aufzuteilen, dass jeder Spieler 10 Karten erhält und 2 Karten übrigbleiben.

(iii) Die Anzahl der Graphen mit Knotenmenge $[n]$ ist $\boxed{}$.

Aufgabe K.21
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Bei dieser Aufgabe müssen die Antworten nicht begründet werden.
Pro Teilaufgabe erhalten Sie

bei richtiger Antwort	1	Punkt,
bei fehlender Antwort	0	Punkte
und bei falscher Antwort	-1	Punkt.

Eine negative Gesamtpunktzahl ist möglich.

(i) Kein Graph mit n Knoten und $n^2/3$ Kanten ist bipartit.

(ii) Es gibt $\binom{8}{3}$ Möglichkeiten, mit vier unterscheidbaren Würfeln eine 9 zu Würfeln.

(iii) Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit erzeugender Funktion $A(x)$ und $(b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit erzeugender Funktion $B(x)$. Dann ist $A(x) + B(x)$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$.

Aufgabe K.22
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ habe die erzeugende Funktion

$$A(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}.$$

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$a_n = (n+1)2^n.$$

Sie dürfen verwenden, dass $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+k}{k} x^n \; k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe K.23
Für $n \in \mathbb{N}$ sei m_n die Anzahl Möglichkeiten, eine Mauer der Länge n und Höhe (überall) 2 aus Dominosteinen (von denen jeder Länge 2 und Höhe 1 hat), die senkrecht oder waagerecht gelegt werden können, zu bauen. Dann sind zum Beispiel $m_1 = 1$ und $m_2 = 2$. Stellen Sie eine Rekursionsbeziehung für m_n auf und Begründen Sie diese.

Ein wichtiger Hinweis zu den Aufgaben: Es wird keine Musterlösungen zum Download geben. Stattdessen wird eine Auswahl der Aufgaben im Wiederholungskurs besprochen. Natürlich kann nur ein Teil der Aufgaben besprochen werden. Deshalb sind wir an Ihrer Einschätzung der Schwierigkeit der Aufgaben interessiert. Bitte teilen Sie uns diese über die Vorlesungshomepage mit!

http://www-m9.ma.tum.de/WS2009/PropDMLerngruppen

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

1. Melden Sie eine neue Übungsgruppe an (Anlegen einer neuen Lerngruppe). Dafür benötigen Sie Ihre mytum-Kennung.
2. Loggen Sie sich als Gruppensprecher ein. (Lerngruppen-Verwaltung)
3. Bewerten Sie nun die Aufgaben des Wiederholungsblatts (und der anderen Blätter aus dem Semester).

Vielen Dank!