# Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. M. Silbernagl

## Aufgabenblatt 2

**Aufgabe 2.1** (Modellierung) [1+3]

a) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{N}$ eine Kantengewichtung, weiter seien $s, t \in V$ mit $s \neq t$. Formulieren Sie das folgenden Problem als Minimierungsproblem über einem geeigneten Unabhängigkeitssystem: „Finde einen bezüglich $\phi$ kürzesten Weg zwischen $s$ und $t$ in $G$."

b) Modellieren Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe eines Ihnen aus der Vorlesung bekannten Problems: Sie arbeiten bei einem großen Unternehmen mit mehreren Standorten und haben die Aufgabe, die Vernetzung dieser Standorte neu zu organisieren. Dazu möchten Sie möglichst wenige Leitungen bei einem Telekommunikationsunternehmen anmieten, so dass alle Ihre Standorte (direkt oder indirekt) miteinander verbunden sind. Das verfügbare Netz ist als Graph $G = (V, E)$ gegeben, Ihre Firma betreibt an jedem Knoten in $V$ eine Niederlassung. Für jede Leitung gibt das Telekommunikationsunternehmen eine Ausfallwahrscheinlichkeit bekannt; diese Wahrscheinlichkeiten $p : E \to (0, 1)$ sind voneinander unabhängig. Gesucht ist eine möglichst kleine, Teilmenge an Leitungen, die alle Ihre Standorte verbinden. Dabei soll die Ausfallwahrscheinlichkeit des gesamten Netzes möglichst gering sein.

**Aufgabe 2.2** (Mengenoperationen auf Matroiden) [2+2+1]
Seien $U_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ und $U_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ Matroide.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: Das Mengensystem $U_1 \cup U_2 := (E_1 \cup E_2, \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$ ist ein Unabhängigkeitssystem/ein Matroid.

b) Seien nun $E_1, E_2$ disjunkt, d. h. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, und sei $U = (E_1 \dot{\cup} E_2, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{I} := \{I \cup I' : I \in \mathcal{I}_1, I' \in \mathcal{I}_2\}$. Ist $U$ ein Unabhängigkeitssystem/ein Matroid?

c) Sei $E_1 = E_2$ und $U := (E_1, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$. Ist $U$ ein Unabhängigkeitssystem/ein Matroid?

**Aufgabe 2.3** (Der Greedy-Algorithmus für vektorielle Matroide) [4]
Sei $n \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ und $U = (V, \mathcal{I})$ das vektorielle Matroid über $V$. Wir definieren eine Gewichtsfunktion $w : V \to \mathbb{N}_0$ durch

$$w(v) := |\{i \in \{1, \dots, n\} : v_i \neq 0\}| .$$

Gesucht ist eine linear unabhängige Teilmenge $V' \subset V$ mit maximalem Gesamtgewicht $w(V') := \sum_{v \in V'} w(v)$. Zeigen Sie mit elementaren Argumenten (d. h. ohne Verwendung des Satzes von Edmonds-Rado), dass der Greedy-Algorithmus dieses Problem löst.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 2.4** (Matching-Überdeckung) [5]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knoten-Teilmenge $V' \subset V$ heißt *Matching-überdeckt*, wenn es ein Matching $M \subset E$ in $G$ gibt, so dass $M$ alle Knoten in $V'$ enthält. Wir definieren das Mengensystem $U = (V, \mathcal{I})$ durch

$$\mathcal{I} := \{I \subset V : I \text{ ist Matching-überdeckt bezüglich } G\}.$$

Zeigen Sie, dass $U$ ein Matroid ist.

**Aufgabe 2.5** (Eindeutige Spannbäume) [4]

Es sei $G = (V, E, c)$ ein zusammenhängender Graph mit einer injektiven Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass der minimal aufspannende Baum von $G$ eindeutig ist.

**Die Abgabedaten von Blatt 2 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2012/ADM`.**