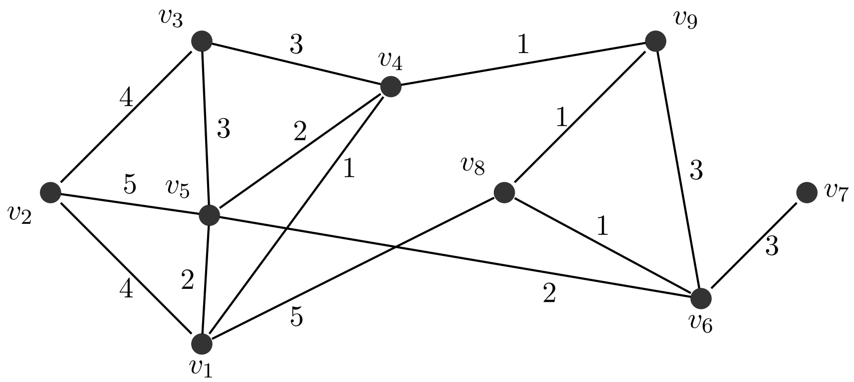
Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 3.1 (Minimum Spanning Tree) [3+3]
Sei G der folgende Graph mit Gewichtsfunktion ℓ wie angegeben:



Berechnen Sie mit den Algorithmen von Kruskal und von Prim jeweils einen minimalen Spannbaum auf G. Geben Sie dabei auch alle relevanten Zwischenschritte an, um Ihre Rechnung nachvollziehbar zu machen.

Aufgabe 3.2 (Stable Set) [3]
Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Teilmenge $V' \subset V$ der Knoten von G heißt *stabile Menge*, wenn keine zwei Knoten in V' durch eine Kante verbunden sind. Geben Sie einen Graphen an, in dem für das Unabhängigkeitssystem S_G der stabilen Teilmengen von G gilt:

$$r_+(U) = 5 \qquad \text{und} \qquad r_-(U) = 2$$

Aufgabe 3.3 (Spannbäume) [5]
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, gewichteter, zusammenhängender Graph. Wie berechnet man einen Spannbaum in G, dessen größte Kante möglichst klein ist?

Bitte wenden!

Aufgabe 3.4 (Matroid-Dualität) [4+4+2+3+2]

a) Sei $U = (E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem und $\mathcal{B}(U)$ die Menge der Basen von U, dann bezeichnen wir $U^* = (E, \mathcal{I}^*)$ mit

$$\mathcal{I}^* := \bigcup_{B \in \mathcal{B}(U)} 2^{E \setminus B}$$

als das *duale Unabhängigkeitssystem* zu U. Zeigen Sie:

i) U^* ist tatsächlich ein Unabhängigkeitssystem,

ii) $\mathcal{B}(U^*) = \{E \setminus B : B \in \mathcal{B}(U)\}$ und

iii) $(U^*)^* = U$.

b) Zeigen Sie: Jeder Matroid $U = (E, \mathcal{I})$ erfüllt

i) die *Basis-Austausch-Bedingung*

$$\begin{aligned} &\forall\ A, B \in \mathcal{B}(U), \forall\ a \in A \setminus B: \\ &\qquad \exists\ b \in B \setminus A: \quad A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}(U) \end{aligned}$$

ii) und die dazu komplementäre Bedingung

$$\begin{aligned} &\forall\ A, B \in \mathcal{B}(U), \forall\ b \in B \setminus A: \\ &\qquad \exists\ a \in A \setminus B: \quad A \setminus \{a\} \cup \{b\} \in \mathcal{B}(U). \end{aligned}$$

c) Sei $U = (E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem, welches die Basis-Austausch-Bedingung erfüllt. Zeigen Sie, dass alle Basen von U gleiche Größe besitzen.

d) Zeigen Sie aufbauend auf die vorherige Teilaufgabe, dass für U auch die Ergänzungsbedingung

$$\forall\ I, J \in \mathcal{I}, |I| + 1 = |J|: \quad \exists\ e \in J \setminus I : I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$$

gilt, womit U ein Matroid ist. Basis-Austausch-Bedingung und Ergänzungsbedingung sind also äquivalent.

Hinweis: Erweitern Sie I und J zu Basen B_I und B_J mit $|B_I \cap B_J|$ maximal und folgern Sie, dass $B_I \subset I \cup B_J$ und $B_I \cap (J \setminus I) \neq \emptyset$.

e) Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, dann nennt man M^* (nach a)) den dazu *dualen Matroid.* Zeigen Sie, dass M^* tatsächlich ein Matroid ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Aussagen aus a)-d) auch, wenn Sie diese nicht gezeigt haben.

Die Abgabedaten von Blatt 3 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2012/ADM`.