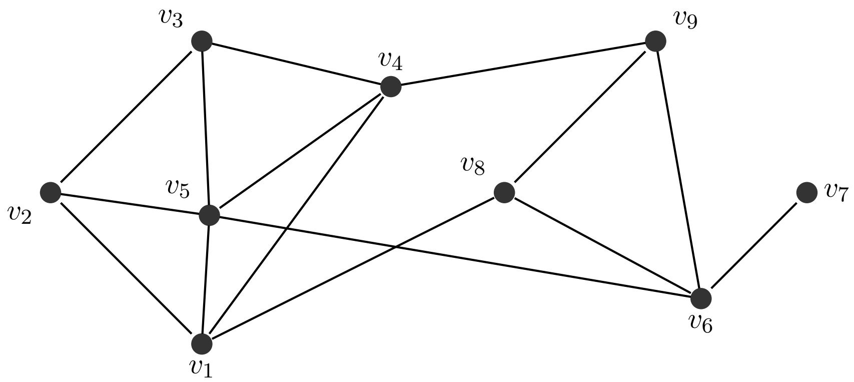
Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 4

Tutoraufgabe 4.1 (Breiten- und Tiefensuche)
Gegeben sei der folgende Graph G:



Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

a) Breitensuche mit Startknoten v_7 markiert immer erst Knoten v_5, dann Knoten v_4.

b) Tiefensuche mit Startknoten v_7 markiert immer erst Knoten v_5, dann Knoten v_4.

c) Breitensuche mit Startknoten v_5 markiert möglicherweise erst Knoten v_8, dann Knoten v_9.

d) Tiefensuche mit Startknoten v_3 markiert möglicherweise erst Knoten v_6, dann Knoten v_4.

e) Eine mögliche Markierungsreihenfolge für Breitensuche mit Startknoten v_7 ist v_7, v_6, v_8, v_9, v_5, v_1, v_2, v_3, v_4.

f) Eine mögliche Markierungsreihenfolge für Tiefensuche mit Startknoten v_5 ist v_5, v_6, v_4, v_1, v_2, v_3, v_8, v_9, v_7.

Aufgabe 4.2 (Test auf Kreisfreiheit)
Gegeben sei ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten und m Kanten. Entwerfen Sie (aufbauend auf dem allgemeinen Markierungs-Algorithmus aus der Vorlesung) einen möglichst effizienten Algorithmus, der feststellt, ob G einen Kreis enthält. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus und geben Sie eine Schranke für die Laufzeit (Anzahl benötigter Operationen) an.

Aufgabe 4.3 (Kürzeste Pfade in Bäumen)
Sei $T = (V, E)$ ein Baum mit n Knoten. Finden Sie ein Vorverarbeitungsverfahren (preprocessing), das $\mathcal{O}(n)$ Operationen braucht, sodass Sie *danach* für zwei beliebige Knoten $v, w \in V$ den (eindeutigen) kürzesten Pfad von v nach w in $\mathcal{O}(\mathrm{dist}(v, w))$ Operationen berechnen können.

Aufgabe 4.4 (Euklidischer Algorithmus für Fibonacci-Zahlen)
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, d. h.

$$f_0 := 0, f_1 := 1 \quad \text{und} \quad f_{k+1} := f_k + f_{k-1} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $k \in \mathbb{N}$ benötigt der euklidische Algorithmus genau k Schritte zur Bestimmung von $\mathrm{ggT}(f_{k+2}, f_{k+1})$.

b) Seien $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ mit $\mu > \nu$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Benötigt der euklidische Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(\mu, \nu)$ mindestens k Schritte, so gilt $\mu \geq f_{k+2}$ und $\nu \geq f_{k+1}$.

Aufgabe 4.5 (Breitensuche und kürzeste Wege)

a) Betrachten Sie folgende modifizierte Breitensuche:

Input: Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ gegeben durch Adjazenzlisten $(v, A(v))$, Startknoten $s \in V$
Output: Graph $T = (V, E_T) \subset G$ und $\mu(v) : V \to \mathbb{N}$

```
for v ∈ V do
    μ(v) ← ∞;
    τ(v) ← ∞;
μ(s) ← 0;
U ← {s};
while U ≠ ∅ do
    wähle u ∈ U nach FIFO-Prinzip;
    for v ∈ A(u) do
        if μ(v) = ∞ then
            U ← U ∪ {v};
            μ(v) ← μ(u) + 1;
            τ(v) ← u;
    U ← U \ {u};
E_T ← {{v, τ(v)} : v ∈ V \ {s}};
return T = (V, E_T), μ.
```

Was stellen T und μ dar? Beweisen Sie (wie immer) Ihre Vermutung.

b) Nun sei zusätzlich zum zusammenhängenden Graph $G = (V, E)$ seine Kantengewichtsfunktion $\phi : E \to \mathbb{R}^+$ gegeben. Modifizieren Sie obigen Algorithmus so, dass er die kürzesten Wege von s zu allen anderen Knoten findet. Die Korrektheit des Algorithmus müssen Sie *nicht* beweisen.

Die Abgabedaten von Blatt 4 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2012/ADM`.