Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. M. Silbernagl

Aufgabenblatt 5

Tutoraufgabe 5.1 (Ein Knapsack-Problem)
Gegeben sei ein Knapsack-Problem mit 4 Gegenständen durch den Gewichtsvektor $w = (2, 4, 3, 4)^T$, die Werte $c = (1, 3, 2, 5)^T$ und die Gewichtsschranke $\rho = 6$. Berechnen Sie eine optimale Lösung des Problem mithilfe des Algorithmus aus der Vorlesung. Geben Sie dazu den Schichtgraphen, die Stufenkostenfunktionen und die Knoten aller Zwischenstufen an.

Aufgabe 5.2 (Knapsack mit Werten als Zustandsbeschreibung) [6]
In der Vorlesung haben Sie einen dynamischen Ansatz zur Lösung des Knapsack-Problems kennengelernt, bei dem die Zustände jeweils die noch freie Restkapazität repräsentieren. Wie müssen Sie diesen Algorithmus abändern, wenn jeder Zustand den aktuell erreichten Gesamtwert des Knapsack repräsentieren soll? Geben Sie den vollständigen Algorithmus an und wenden Sie ihn auf das Beispiel aus Aufgabe 5.1 an.

Aufgabe 5.3 (Maximale Teilsumme) [4]
Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ an, der für jeden beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ den Wert einer maximalen zusammenhängenden Teilsumme findet, d. h. den Wert

$$\max_{a,b \in [n], a \le b} \sum_{i=a}^{b} v_i$$

berechnet.

Hinweis: Betrachten Sie das Teilproblem „Finde den Wert einer maximalen zusammenhängenden Teilsumme von v, welche in gegebenem b endet“.

Aufgabe 5.4 (Dynamische Programmierung) [5]
Sie sind in einem Restaurant, dessen Speisekarte n Vorspeisen für jeweils $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{N}$ Einheiten einer Währung anbietet. Sie haben genau $P \in \mathbb{N}$ Einheiten dieser Währung, und wollen diese restlos ausgeben. Gesucht ist ein Algorithmus, der mit Hilfe dynamischer Optimierung eine gültige Auswahl an Vorspeisen findet, falls eine solche existiert. Dabei soll jede Vorspeise maximal ein Mal bestellt werden.

Literaturhinweis: `http://xkcd.com/287/`

Aufgabe 5.5 (Dynamisches TSP) [5]
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K_n = ([n], E)$ der vollständige Graph auf n Knoten. Zeigen Sie mit Hilfe dynamischer Programmierung, dass zu jeder Kostenfunktion $c : E \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ eine optimale TSP-Tour auf K_n in $\mathcal{O}(n^2 2^n)$ Schritten gefunden werden kann. Um welchen Faktor ist diese Laufzeit besser als die „brute force“-Lösung mit Laufzeit $n!$, wenn Sie $n = 5$ bzw. $n = 10$ Knoten betrachten?

Literaturhinweis: `http://xkcd.com/399/`

Die Abgabedaten von Blatt 5 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2012/ADM`.