Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Discrete Optimization (MA 3502), WiSe 2012/13

Prof. Dr. P. Gritzmann, Dr. René Brandenberg

Problem Sheet 5

Problem 5.1
Let

$$C := \text{pos}\left\{\begin{pmatrix}4/3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\4/3\end{pmatrix}\right\}.$$

a) Guess an inclusion-minimal Hilbert basis H for C and prove that your H actually is a Hilbert basis.

b) Prove that your H is a unique inclusion-minimal Hilbert basis.

Solution to problem 5.1

a) $H = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ is a Hilbert-basis. All three vectors are in C and every integer point in C may be reached by combining them as the second coordinate of any vector in C may never be smaller than the first. (Follows also from 5.3).

b) Each of the three vectors must be within each Hilbert-basis as it cannot be combined from any other integer vectors in C.

Problem 5.2
Let v^1, v^2 be two vectors in $\mathbb{R}^2$, $P = \text{pos}\{v^1, v^2\}$, and H the minimal Hilbert basis of P.

a) Give values for v^1 and v^2, s. t. $|H| = 2$. Determine H.

b) Give values for v^1 and v^2, s. t. $|H| = 5$ and all elements of H are vertices of $\text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\})$. Determine H.

c) Show that for any $n \in \mathbb{N}$ there are rational vectors v^1 and v^2, s. t. $|H| \geq n$.

Solution to problem 5.2

a) For example, $v^1 = (0,1)^T$ and $v^2 = (1,0)^T$. Then $H = \{v^1, v^2\}$.

b) For example $v^1 = (3,5)^T$ and $v^2 = (-3,5)^T$. Then $H = \{(-3,5)^T, (-1,2)^T, (0,1)^T, (1,2)^T, (3,5)^T\}$.

c) Let $v^1 = (0,1)^T$ and $v^2 = (n,1)^T$. Then $H = (0,1)^T, (1,1)^T, (2,1)^T, \ldots, (n,1)^T$ and has size $n+1$.

Problem 5.3

Let $v^1, \dots, v^k \in \mathbb{Z}^n$ and suppose $K := \mathrm{pos}\{v^1, \dots, v^k\}$ is a pointed cone. A *zonotope* Z is a Minkowski-sum of line segments, $Z = \sum_{i=1}^k [\alpha_i, \beta_i] z^i$ for some $\alpha_i < \beta_i$ and $z^i \in \mathbb{R}^n$. A *parallelotope* is a zonotope $\sum_{i=1}^k [\alpha_i, \beta_i] z^i$, where all z^i are linearly independent.

Show: the minimal Hilbert basis R of K is a subset of the integer points within

a) the zonotope

$$\sum_{i=1}^k [0,1] v^i = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v^i : \lambda_i \in [0,1] \right\}.$$

b) the union of parallelotopes

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \sum_{i \in B} [0,1] v^i,$$

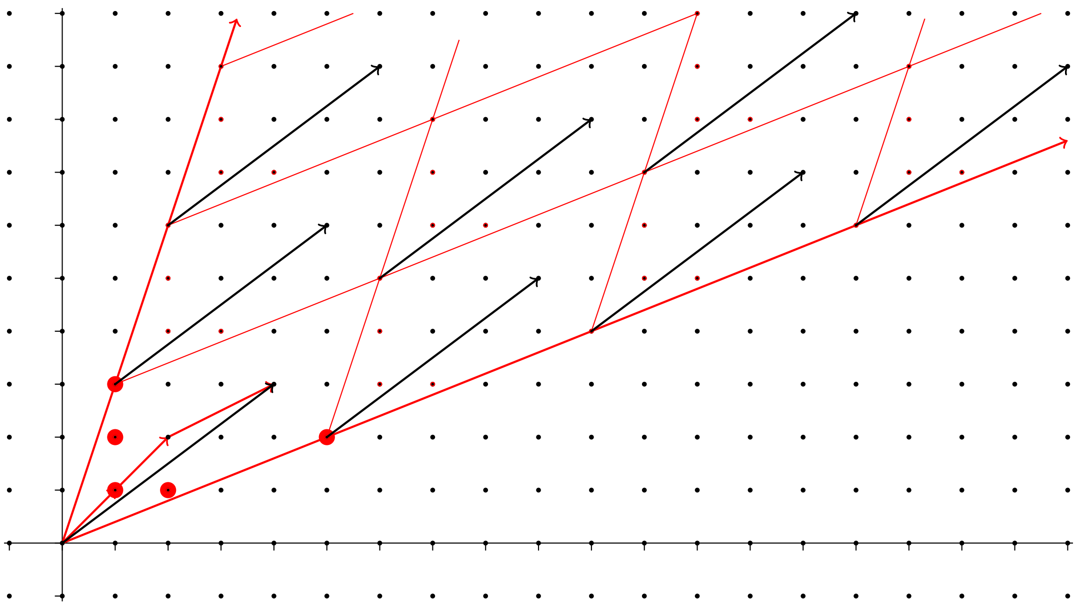
where $\mathcal{B} := \{B \subset [k] : \{v_i : i \in B\} \text{ is a basis of } \mathbb{R}^n\}$, if K is fulldimensional.

Solution to problem 5.3

a) We may assume that w. l. o. g. $\{v^1, \dots, v^k\}$ is irredundant and $\gcd_{j \in [n]} \left(v^i\right)_j = 1 \quad \forall i \in [k]$. So we have $\{v^1, \dots, v^k\} \subset R$.
Let $w \in \mathrm{pos}\{v^1, \dots, v^k\} \cap \mathbb{Z}^n$, so we have $w = \sum_{i=1}^k \lambda_i v^i$, with $\lambda_i \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ and thus

$$w = \underbrace{\sum_{i=1}^k \lfloor \lambda_i \rfloor v^i}_{\lfloor \lambda_i \rfloor \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \left(\lambda_i - \lfloor \lambda_i \rfloor\right) v^i}_{=:\hat{w} \in \sum_{i=1}^k [0,1] v^i}, \text{ with } \lambda_i \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}.$$

Because of $\hat{w} \in \sum_{i=1}^k [0,1] v^i$ and $\hat{w} \in \mathrm{pos}\{v^1, \dots, v^k\} \cap \mathbb{Z}^n$ there exists a representation of $\hat{w}$ as a positive integer combination of elements of $R \cap \sum_{i=1}^k [0,1] v^i$. This gives us a positive integer combination of elements in $R \cap \sum_{i=1}^k [0,1] v^i$ of w. With the assumption that R is minimal the claim follows.



b) Since K is pointed there exists $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and a hyperplane $H_{(a,1)}$, s. t. $K \cap H_{(a,1}$ is a polytope with vertices $\mu_i v^i$ for some $\mu_i \geq 0$, $i \in [k]$ (see the lecture on convex analysis / convex optimization). Now, for every $w \in K$ there exists $\beta \geq 0$, s. t. $w \in K \cap H_{(a,\beta)}$. It follows from Cartheodory's theorem (applied on the $n-1$ dimensional affine subspace $H_{(a,\beta)}$), that there exists $I \subset [k]$, $|I| \leq n$, s. t. $w \in \beta \operatorname{conv}\{v^i : i \in I\}$ and w. l. o. g. we may assume that the v^i, $i \in I$ are l. i.. Now the claimed formula follows from part (a).

Problem 5.4

Let $G = (V, E)$ a graph and S_G the corresponding incidence matrix. Consider again the perfect-matching polytope $P = \{x \in \mathbb{R}^m : S_G x = \mathbb{1},\ x \geq 0\}$ as given in Problem 4.4.

a) Give an example of a graph G such that P has a fractional vertex.

b) Let $C = (U, E_U)$ denote an odd cycle in G with nodes $U = \{v_1, \ldots, v_{2n+1}\}$ and edges $E_U = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in [2n]\} \cup \{\{v_1, v_{2n+1}\}\} \subset E$. Show:
Every incidence vector x of a (perfect) matching, fulfills additionaly to $S_G x = \mathbb{1}$, $x \geq 0$ the condition

$$\sum_{e \in E_U} x_e \leq \frac{|U| - 1}{2}.$$

c) Suppose the induced subgraph $G(U)$ of G contains more edges than E_U. Show that the inequality $\sum_{e \in E_U} x_e \leq \frac{|U|-1}{2}$ is redundant (i.e. it can be obtained from adding other inequalities in $S_G x = \mathbb{1}$, $x \geq 0$, or inequalities belonging to other odd cycles).

Solution to problem 5.4

a) Aus der Addition der drei gegebenen Nebenbedingungen erhält man $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3$ bzw. $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3/2$. Da auf der linken Seite für Inzidenzvektoren von Matchings alles ganzzahlig ist, folgt für diese auch die Gültigkeit der Ungleichung $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$, die aber durch x^* verletzt wird. Bei diesem Schnitt handelt es sich um den R-Schnitt zum Vektor $y = (1/2, 1/2, 1/2)^T$.

b) Wir gehen analog zu Teil (a) vor. Aus den Bedingungen in 2.1.29 folgt, dass $x_e + x_{e'} \leq 1$ für alle Paare von Kanten e, e' in E die einen gemeinsamen Endknoten haben. Innerhalb von U sind das $x_{\{u_i,u_{i+1}\}} + x_{\{u_{i+1},u_{i+2}\}} \leq 1$, $1 \leq i \leq 2n-1$, sowie $x_{\{u_{2n},u_{2n+1}\}} + x_{\{u_1,u_{2n+1}\}} \leq 1$ und $x_{\{u_1,u_{2n+1}\}} + x_{\{u_1,u_2\}} \leq 1$. Summiert man nun über alle $|U|$ dieser Ungleichungen, so erhält man die gültige Ungleichung $2\sum_{e\in E_U} x_e \leq |U|$ bzw. $\sum_{e\in E_U} x_e \leq |U|/2$. Da die linke Seite für jeden Inzidentvektor eines Matchings in G ganzzahlig ist, erfüllen diese wegen $|U|$ ungerade auch die Ungleichung $\sum_{e\in E_U} x_e \leq (|U|-1)/2$. Der entsprechende Schnitt ist wieder ein R-Schnitt, diesmal zum Vektor $y = \mathbf{1}_U/2$.

c) Existiert in E eine Kante e', die zwei innerhalb des ungeraden Kreises nicht benachbarte Knoten verbindet, so lässt sich der ungerade Kreis durch Hinzunahme dieser Kante in zwei Kreise U' und W aufspalten, von denen einer ungerade (o.E. U') und einer gerade ist. Wie in Teil (b) zeigt man, dass $\sum_{e\in E_{U'}} x_e \leq (|U'|-1)/2$ und $\sum_{e\in E_W} x_e \leq |W|/2$. Mit derselben Rechnung wie in (b) erh"alt man au"serdem die Ungleichung $\sum_{e\in E_U} x_e \leq (|U|-1)/2$. Die Kante e' ist dabei mit ihren beiden Endknoten in U' und in W enthalten. Addiert man alle drei Ungleichungen, so ergibt sich

$$\sum_{e\in E_U} 2x_e + 2x_{e'} \leq \frac{|U'|-1+|W|+|U|-1}{2} = |U| \tag{1}$$

Da $|U|$ ungerade ist, folgt daraus die Ungleichung

$$\sum_{e\in E_U} x_e + x_{e'} \leq \frac{|U|-1}{2}$$

Die linke Seite dieser Ungleichung enth"alt genau die Summanden der Ungleichung aus (b), und zus"atzlich den Term $x_{e'}$, die rechte Seite ist diesselbe wie in (b). Also ist die Ungleichung st"arker als die in (b) hergeleitete.

Auch in diesem Fall ist die Ungleichung wieder ein R-Schnitt. Dabei ist zunächst zu beachten, dass die Kombination von R-Schnitten i.a. keinen R-Schnitt mehr liefert. Die Argumentation darf also nicht obige Konstruktion der Ungleichung benutzen. Es gibt aber die Möglichkeit, Gleichung (1) direkt aus den Nebenbedingungen zu gewinnen. Man betrachte o.B.d.A den Subgraphen G', der aus dem Kreis und der zusätzlichen Kante besteht. In diesem Fall ergibt $\mathbf{1}^T(S_{G'}x) \leq \mathbf{1}^T\mathbf{1}$ Gleichung (1).