
Discrete Optimization

Peter Gritzmann

Zentrum Mathematik, Technische Universität München
D-80290 München, Germany
gritzman@ma.tum.de

Kurzskript, Technische Universität München
Wintersemester 2012/2013

1 Einleitung

1.1 Produktionsplanung

Ein Hersteller von Umweltlacken hat die technischen Möglichkeiten, n verschiedene Endprodukte herzustellen: Lacke L_1, \dots, L_n . Dafür stehen entsprechende Ressourcen (Rohstoffe, Arbeitsleistungen etc.) R_1, \dots, R_m zur Verfügung. Diese unterliegen Mengenrestriktionen β_1, \dots, β_m , d.h. für $i = 1, \dots, m$ können von Ressource R_i maximal β_i Mengeneinheiten eingesetzt werden. Für $j = 1, \dots, n$ erzielt man bei der Herstellung einer Mengeneinheit von Lack L_j einen Reingewinn von γ_j . Es soll ein Produktionsplan mit maximalem Gesamtgewinn ζ^* aufgestellt werden.

Die Menge aller zulässigen Produktionspläne ist durch

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \xi_j &\leq \beta_i & (i = 1, \dots, m) \\ \xi_j &\geq 0 & (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

gegeben, und die Aufgabe besteht darin, die durch

$$\varphi(x) := \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) := \sum_{j=1}^n \gamma_j \xi_j$$

für $x \in \mathbb{R}^n$ gegebene Zielfunktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ über dem zulässigen Bereich zu maximieren. In Matrixschreibweise lässt sich das Problem formulieren als

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei

$$c := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T \quad \wedge \quad A := (\alpha_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \quad \wedge \quad b := (\beta_1, \dots, \beta_m)^T$$

gilt und die Variablen im Vektor

$$x := (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$$

zusammengefasst sind.

1.1.1 Bezeichnung. Eine (*lineare*) *Produktionsaufgabe* ist spezifiziert durch folgende Daten

$$\begin{aligned} m, n \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad A := (\alpha_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ b := (\beta_1, \dots, \beta_m)^T \in [0, \infty[^m \quad \wedge \quad c := (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T \in [0, \infty[^n. \end{aligned}$$

Der Vektor b quantifiziert die **verfügbaren Ressourcen**, c ist der **Preisvektor**, und A heißt **Technologiematrix**.

Ferner sei das Zielfunktional $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ definiert durch $\varphi(x) := c^T x$. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ heißt (**zulässiges**) **Produktionsprogramm**, wenn

$$Ax \leq b \quad \wedge \quad x \geq 0$$

gilt. Seien F die Menge aller zulässigen Produktionsprogramme und $x^* \in F$. Dann heißt x^* **optimales Produktionsprogramm**, wenn

$$x^* \in \operatorname{argmax} \{ \varphi(x) : x \in F \}$$

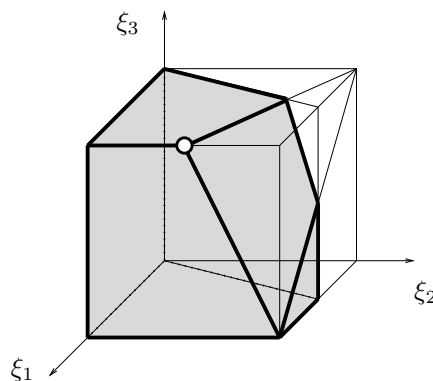
ist. Ziel der Produktionsaufgabe ist es zu entscheiden, ob ein optimales Produktionsprogramm existiert, und falls dem so ist, eines zu finden.

Die Menge aller Produktionsaufgaben heißt (**lineares**) **Produktionsproblem**.

1.1.2 Beispiel. Die Produktionsaufgabe sei gegeben durch

$$\begin{array}{rcll} \max & \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 & & \\ \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 & \leq & 3 & \\ -2\xi_1 + \xi_2 & \leq & 0 & \\ \xi_1 & \leq & 1 & \\ & \xi_2 & \leq & 1 & \\ & & \xi_3 & \leq & 1 & \\ & \xi_1, \xi_2, \xi_3 & \geq & 0. & \end{array}$$

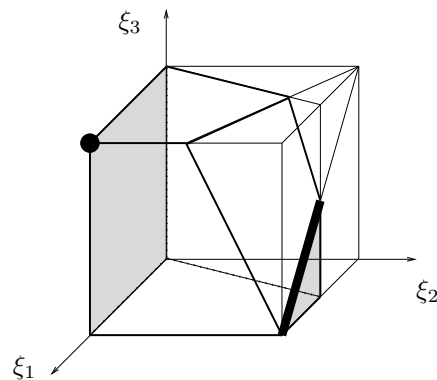
Abbildung 1.1 zeigt die Menge aller zulässigen Produktionsprogramme sowie die (in diesem Beispiel) eindeutig bestimmte optimale Lösung $x^* := (1, \frac{1}{2}, 1)^T$; der Optimalwert der Zielfunktion ist $5/2$.



1.1 Abbildung. Geometrische Darstellung des Polytops der zulässigen Produktionsprogramme in Beispiel 1.1.2; der Optimalpunkt x^* ist hervorgehoben.

In dieser Formulierung ist vorausgesetzt, dass alle Güter homogen sind, d.h. in beliebigen Mengen eingekauft werden kann. Ist dieses jedoch nicht der Fall, weil etwa nur Großpackungen abgegeben werden, gibt es also feste Quantitätsschragen, so gehen diese als weitere Nebenbedingungen an die Mengen ξ_i in die Formulierung des Problems ein. Muss etwa $\xi_2 \in \mathbb{N}_0$ gelten, so wird die vorher rein lineare Optimierungsaufgabe zu einer gemischt-ganzzahligen Aufgabe.

Fordert man, dass alle Variablen ganzzahlig sein müssen, so sind



1.2 Abbildung. Der zulässige Bereich unter der zusätzlichen Bedingung $\xi_2 \in \mathbb{Z}$. Die Menge der Optimalpunkte besteht aus der schwarz hervorgehobenen Strecke und dem markierten Punkt.

$$(0,0,0)^T, (0,0,1)^T, (1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (1,0,1)^T$$

die einzigen zulässigen Lösungen. Optimal sind dann die Punkte $(1,1,0)^T$ und $(1,0,1)^T$.

1.2 Standortprobleme

Ein Großhandelskonzern plant den Aufbau eines Vertriebssystems in Europa. Verträge mit Großkunden G_1, \dots, G_n sind bereits geschlossen, mögliche Standorte S_1, \dots, S_m für Versandgroßlager sind in der Beurteilung. Es soll eine optimale Auswahl der Standorte getroffen werden. Dabei treten natürlich Fixkosten κ_j für die Errichtung eines Versandlagers am Standort S_j auf. Andererseits sind für $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$ die Transportkosten $\gamma_{i,j}$ bekannt, die auftreten, wenn man den Großkunden G_i vom Standort S_j aus beliefert. Ferner ist die Gesamtliefermenge α_i an G_i vertraglich festgelegt sowie die Kapazität β_j des möglichen Lagers im Standort S_j gegeben.

Die Variablen $\xi_{i,j}$ geben an, wieviel von Standort S_j aus an den Kunden G_i geliefert werden soll. Da der Bedarf aller Kunden gedeckt werden muss, ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \xi_{i,j} &= \alpha_i & (i = 1, \dots, n) \\ \xi_{i,j} &\geq 0 & (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Die Entscheidung, ein Versandgroßlager am Standort S_j zu errichten, wird mit Hilfe einer 0-1-Variable η_j modelliert. Die Kapazitätsbeschränkungen des möglichen Lagers in S_j führen dann auf die Bedingung

$$\eta_j \in \{0,1\} \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^n \xi_{i,j} \leq \beta_j \eta_j \quad (j = 1, \dots, m).$$

Als Zielfunktion wird die Minimierung der Kosten über den Planungshorizont angesetzt, d.h.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_{i,j} \xi_{i,j} + \sum_{j=1}^m \kappa_j \eta_j.$$

Es liegt insgesamt also eine gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe in den reellen Variablen $\xi_{i,j}$ und den *Entscheidungsvariablen* η_j vor.

1.3 Zuordnungsprobleme

In einer Partnervermittlungsagentur stehen vier Personen P_1, P_2, P_3, P_4 vom Geschlecht Γ_1 und drei Personen Q_1, Q_2, Q_3 vom Geschlecht Γ_2 mit $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ zur Bildung von (getrennt geschlechtlichen) Paaren zur Verfügung. Die Agentur hat zu jedem der sieben Kandidaten ein Profil erstellt, auf dessen Grundlage für jedes der zwölf möglichen Paare (P_i, Q_j) mit $i = 1, 2, 3, 4$ und $j = 1, 2, 3$ ein Kompatibilitätskoeffizient $\gamma_{i,j} \in \mathbb{R}$ ermittelt wurde, der angibt, wie gut die entsprechenden Profile zueinander passen. Ziel ist es, eine solche Zuordnung zu finden, die die Summe der entsprechenden Koeffizienten maximiert.

Ähnliche Fragestellungen ergeben sich bei der Vergabe von Aufgaben an Arbeitskräfte, bei der Platzierung von Objekten auf Regalen in Packstationen und in vielen anderen Kontexten (bisweilen unter weiteren zusätzlichen Bedingungen).

Die Aufgabe, eine optimale Zuordnung zu finden, lässt sich so mit Hilfe der folgenden ILP-Aufgabe beschreiben:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \gamma_{i,j} \xi_{i,j} \\ \sum_{j=1}^{n_2} \xi_{i,j} & \leq 1 & (i = 1, \dots, n_1) \\ \sum_{i=1}^{n_1} \xi_{i,j} & \leq 1 & (j = 1, \dots, n_2) \\ \xi_{i,j} & \in \{0, 1\} & (i = 1, \dots, n_1; j = 1, \dots, n_2). \end{aligned}$$

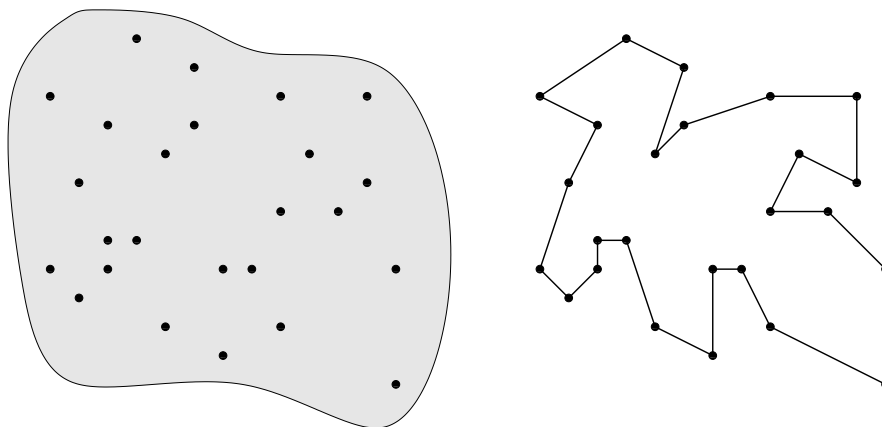
1.4 Das Problem des Handlungsreisenden

Das als *Traveling Salesman Problem* oder kürzer als TSP bekannte Rundreiseproblem ist ein Standardproblem der kombinatorischen Optimierung. Hierbei ist eine kürzeste Rundreise (Tour) zu finden, die alle vorgegebenen Städte genau einmal besucht.

Abbildung 1.3 zeigt eine (fiktive) Landkarte und eine Rundreise durch alle Städte. Dabei wird zwischen zwei Städten jeweils der euklidische Abstand zugrunde gelegt.

1.4.1 Bemerkung. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ sei τ_n die Anzahl aller verschiedenen Rundreisen durch n Städte. Dann gilt

$$\tau_n = \frac{1}{2}(n-1)! > \sqrt{\pi/2}(n-1)^{n-\frac{1}{2}} e^{-n+1}.$$



1.3 Abbildung. Links: Städte eines (fiktiven) Landes; rechts: Rundreise durch alle Städte.

Beweis: Da die Rundreise geschlossen ist, und es keine Rolle spielt, an welchem Punkt wir starten, beginnen wir bei einer beliebigen Stadt. Nach dem Start stehen als nächste zu besuchende Stadt dann alle $n - 1$ anderen zur Verfügung. Wählt man eine aus, so bleiben danach $n - 2$ Möglichkeiten fortzufahren. Danach stehen nur noch $(n - 3)$ Städte zur Verfügung, und entsprechend geht es weiter. Berücksichtigt man noch, dass durch diese Zählweise jede Tour doppelt gezählt wird, da es keinen Unterschied macht, ob eine Tour ‘vorwärts’ oder ‘rückwärts’ durchlaufen wird, folgt $\tau_n = (n - 1)!/2$. Aus der *Stirlingschen¹ Formel*

$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} < n! \leq \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{1}{12n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ergibt sich daher die Behauptung. □

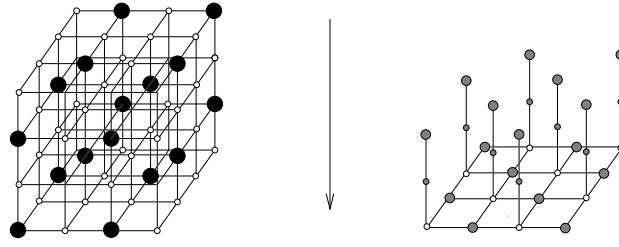
1.5 Rekonstruktion kristalliner Strukturen

Bei der Herstellung von Silizium-Chips sollen neue bildgebende Verfahren zur Qualitätskontrolle eingesetzt werden. Mit Hilfe moderner Methoden der hochauflösenden Transmissionselektronenmikroskopie (HRTEM) kann man für bestimmte Materialien (wie etwa Silizium) in geeigneten Richtungen bestimmen, wieviele Atome in den entsprechenden Atomsäulen enthalten sind.

Wir nehmen (der Einfachheit der Darstellung halber) an, dass die zugrunde liegende kristalline Gitterstruktur der von \mathbb{Z}^3 entspricht und die zu untersuchende Probe im Bereich $[1, q]^3$ liegt mit $q \in \mathbb{N}$. Ferner seien die Richtungen der Aufnahmen parallel zu den drei Koordinatenachsen im \mathbb{R}^3 . Dann erhält man (bis auf gewisse Messfehler) die Informationen, wieviele Atome jeweils auf jeder Geraden parallel zu einer der Koordinatenachsen liegen. Abbildung 1.4 zeigt eine kristalline Struktur zusammen mit ihrem HRTEM-Bild in Richtung der ξ_3 -Koordinatenachse.

Die gegebene Aufgabe der *diskreten Tomographie* besteht in der Rekonstruktion der zugrunde liegenden Gittermenge aus den gegebenen ‘X-ray Daten’. Zur mathematischen

¹ James Stirling, 1692 – 1770.



1.4 Abbildung. Links: eine 3-dimensionale Gittermenge; rechts: Graph der X-ray Messdaten in Richtung der ξ_3 -Koordinatenachse.

Modellierung führen wir für jeden potentiellen Atommittelpunkt $(i,j,k)^T \in [1,q]^3$, d.h. für jedes der 'Indextripel' (i,j,k) ($i,j,k = 1, \dots, q$) eine Variable

$$\xi_{i,j,k} \in \{0,1\}$$

ein, die angibt, ob die betreffende Position durch ein Atom besetzt ist. Nebenbedingungen erhält man aus den Messwerten.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \xi_{i,j,k} &= \alpha_{j,k} & (j,k = 1, \dots, q) \\ \sum_{j=1}^q \xi_{i,j,k} &= \beta_{i,k} & (i,k = 1, \dots, q) \\ \sum_{k=1}^q \xi_{i,j,k} &= \gamma_{i,j} & (i,j = 1, \dots, q). \end{aligned}$$

Zusammen mit den 0-1-Bedingungen an die Variablen beschreibt dieses System alle kristallinen Strukturen, die mit den gegebenen Messdaten verträglich sind.

1.6 Eine 'klassische ganzzahlige Optimierungsaufgabe':

Für $n \in \mathbb{N}$ sei das folgende Optimierungsproblem im \mathbb{R}^3 gegeben:

$$\begin{aligned} \min & (\xi_1^n - \xi_2^n + \xi_3^n)^2 \\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 & \geq 1 \\ \xi_1, \xi_2, \xi_3 & \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

$\zeta^*(n)$ bezeichne das Optimum der Zielfunktion. Es gilt $\zeta^*(n) \geq 0$ und $\zeta^*(1) = 0$.

Offenbar ist $\zeta^*(n) = 0$ genau dann, wenn die Gleichung

$$\xi_1^n + \xi_3^n = \xi_2^n$$

eine positive ganzzahlige Lösung besitzt. Dass dieses für kein $n \geq 3$ der Fall ist, hat im 17. Jahrhundert bereits *Pierre de Fermat* behauptet; der *Satz von Fermat* konnte aber bekanntlich erst 1995 von *Wiles* bzw. *Wiles und Taylor* bewiesen werden.

Interessant von Seiten der Optimierung ist aber, dass es sich bei der Zielfunktion für jedes n um ein Polynom vom Grad $2n$ handelt, also eine beliebig oft differenzierbare, eigentlich doch sehr einfach strukturierte Funktion. Während sich die vorher vorgestellten Probleme entweder als effizient lösbar erweisen werden oder ihre Schwierigkeit erst in relativ hohen Dimensionen entfalten, führt der Satz von Fermat für festes n auf eine Optimierungsaufgabe der Dimension 3.

Der 'volle Fermat' für alle Dimensionen ist äquivalent zu der Aussage, dass das Minimum des nichtlinearen diskreten Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} & \min (\xi_1^\eta - \xi_2^\eta + \xi_3^\eta)^2 \\ & \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3 \quad \geq \quad 1 \\ & \quad \quad \quad \eta \quad \geq \quad 3 \\ & \xi_1, \quad \xi_2, \quad \xi_3, \quad \eta \quad \in \quad \mathbb{Z} \end{aligned}$$

mindestens 1 ist; es 'lebt' in der Dimension 4.

2 Lineare diophantische Gleichungssysteme

2.1 Gitter

Anders als bei Optimierungsproblemen über \mathbb{R} oder \mathbb{Q} liegt bei der ganzzahligen linearen Optimierung kein Körper, sondern nur ein Ring zugrunde, d.h. wir operieren nicht in Vektorräumen, sondern in Modulen. Ferner ist \mathbb{Z}^n *diskret*; zwei verschiedene Punkte aus \mathbb{Z}^n haben stets einen (euklidischen) Abstand von mindestens 1. Für alle Strukturaussagen und Algorithmen für ganzzahlige Optimierungsprobleme ist die *Gitterstruktur* von \mathbb{Z}^n von besonderer Bedeutung.

2.1.1 Definition. Sei $L \subset \mathbb{R}^n$.

- (a) L heißt **Gitter** [engl.: lattice] des \mathbb{R}^n , wenn es eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ des \mathbb{R}^n gibt, mit

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ heißt dann **Basis** des Gitters.

Ist der Bezug klar, so werden die Elemente eines Gitters einfach **Gitterpunkte** genannt.

- (b) \mathbb{Z}^n heißt **Standardgitter** oder **Zahlengitter** im \mathbb{R}^n .

- (c) Seien L ein Gitter und $S \subset L$. S heißt **Teilgitter** oder **Untergitter**, wenn $S = \{0\}$ ist, oder wenn es $k \in \mathbb{N}$ und linear unabhängige Vektoren $s_1, \dots, s_k \in L$ gibt mit

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i s_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

In diesem Fall heißen S durch s_1, \dots, s_k (**ganzzahlig**) **erzeugt** und s_1, \dots, s_k **Basis** des Untergitters S .

2.1.2 Beispiel. Die Abbildung 2.1 zeigt die beiden Gitter L_1, L_2 des \mathbb{R}^2 ; sie sind etwa (der Reihe nach) erzeugt von den Basen

$$\{u_1, u_2\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

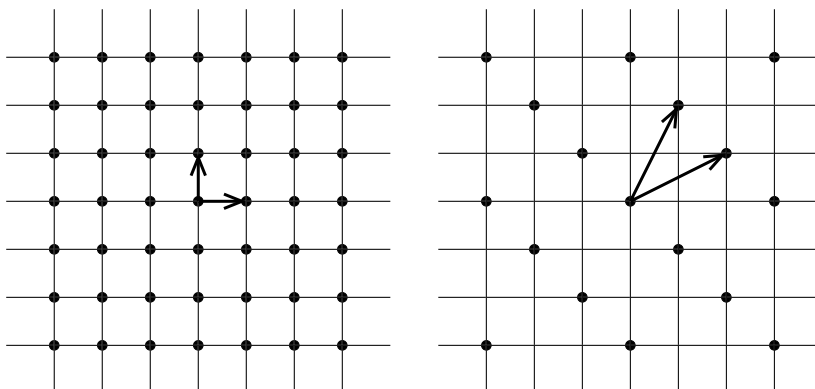
L_1 ist das Standardgitter \mathbb{Z}^2 , L_2 ist ein Teilgitter von L_1 .

Das durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

erzeugte Gitter L_3 enthält (wie alle Gitter) den Nullpunkt, sonst aber keinen einzigen weiteren ganzzahligen Punkt des \mathbb{R}^2 .¹

¹ Man beachte, dass die Projektionen der Gitterpunkte auf die Koordinatenachsen dort dicht liegen.



2.1 Abbildung. Gitter L_1, L_2 des \mathbb{R}^2 . Die angegebenen Basen sind hervorgehoben.

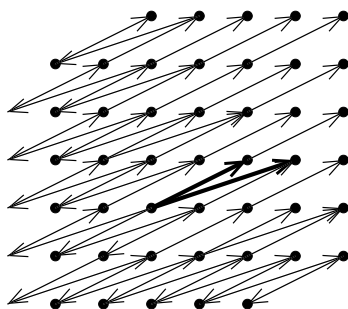
2.1.3 Bemerkung. Sei L ein Gitter des \mathbb{R}^n . Dann gibt es eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $L = M(\mathbb{Z}^n)$.

Beweis: Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von L und $M := (v_1, \dots, v_n)$. Dann gilt $L = M(\mathbb{Z}^n)$. \square

2.1.4 Beispiel. Seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind v_1, v_2 linear unabhängig, und es gilt für $(\beta_1, \beta_2)^T \in \mathbb{Z}^2$



2.2 Abbildung. Basis $\{v_1, v_2\}$ des Zahlengitters \mathbb{Z}^2 ; dargestellt ist auch, wie Gitterpunkte durch die Basisvektoren erzeugt werden.

$$(\beta_1 - 2\beta_2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (-\beta_1 + 3\beta_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Somit lässt sich jeder Gitterpunkt $(\beta_1, \beta_2)^T \in \mathbb{Z}^2$ als ganzzahlige Linearkombination von v_1, v_2 darstellen. Also bilden v_1, v_2 eine Basis von \mathbb{Z}^2 .

Mit

$$A := (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad x := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad b := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

steckt hinter dieser Darstellung natürlich nichts anderes als die Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b$$

über \mathbb{Z}^2 . Tatsächlich ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

und es gilt $x = A^{-1}b$.

2.2 Diophantische Gleichungen

2.2.1 Bezeichnung. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$. Dann heißt

$$Ax = b \quad \wedge \quad x \in \mathbb{Z}^n$$

lineares diophantisches Gleichungssystem.² Für $b = 0$ heißt das lineare diophantische Gleichungssystem **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Das Problem

Gegeben: $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$;

Auftrag: Bestimme ein $x^* \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax^* = b$ oder entscheide, dass es kein solches gibt!

heißt LINEARES DIOPHANTISCHES GLEICHUNGSSYSTEM. Sind alle Aufgaben auf den Fall $m = 1$ beschränkt, so wird das Problem als LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG bezeichnet.

2.2.2 Lemma. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{Z}$ und $\kappa := \text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Die lineare diophantische Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n = \beta \quad \wedge \quad \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{Z}$$

ist genau dann lösbar, wenn κ ein Teiler von β ist.

Beweis: Sind alle α_i gleich 0, so ist die Behauptung trivial. O.B.d.A. nehmen wir daher an, dass $\alpha_1 \neq 0$ gilt. Sei

$$\sigma^* := \min\{\sigma \in \mathbb{N} \wedge \exists(\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{Z}) : \sigma = \alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n\}.$$

Man beachte, dass σ^* existiert, da ja insbesondere $|\alpha_1|$ als ganzzahlige Linearkombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ darstellbar ist. Seien also $\xi_1^*, \dots, \xi_n^* \in \mathbb{Z}$ mit

$$\sigma^* = \alpha_1 \xi_1^* + \dots + \alpha_n \xi_n^*.$$

Da jede ganzzahlige Linearkombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ durch κ teilbar ist, folgt $\kappa \leq \sigma^*$. Seien nun $i \in [n]$, $\gamma_i, \rho_i \in \mathbb{Z}$ mit

$$0 \leq \rho_i \leq \sigma^* - 1 \quad \wedge \quad \alpha_i = \sigma^* \gamma_i + \rho_i.$$

Dann gilt

$$\rho_i = \alpha_i - \sigma^* \gamma_i = \alpha_i - \alpha_1 \xi_1^* \gamma_i - \dots - \alpha_n \xi_n^* \gamma_i,$$

d.h. auch ρ_i ist eine ganzzahlige Linearkombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Aus der Wahl von σ^* und $0 \leq \rho_i \leq \sigma^* - 1$ folgt somit $\rho_i = 0$, d.h. σ^* teilt α_i . Da i beliebig gewählt war, teilt σ^* auch κ , es folgt insgesamt $\sigma^* = \kappa$ und damit die Behauptung. \square

² Diophantos von Alexandrien, genaue Daten unbekannt, lebte im Zeitintervall $[-150, 364]$.

2.2.3 Bemerkung. Seien $n \geq 3$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{ggT}(\text{ggT}(\alpha_1, \alpha_2), \alpha_3, \dots, \alpha_n).$$

Beweis: Seien

$$\kappa := \text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad \wedge \quad \tau := \text{ggT}(\alpha_1, \alpha_2) \quad \wedge \quad \eta := \text{ggT}(\tau, \alpha_3, \dots, \alpha_n).$$

Da κ jede der Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ teilt, teilt κ auch τ und damit η . Andererseits ist jeder Teiler von η auch Teiler von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ und damit von κ . Insgesamt folgt $\kappa = \eta$. \square

2.2.4 Lemma. In polynomieller Zeit kann entschieden werden, ob eine gegebene lineare diophantische Gleichung lösbar ist.

Beweis: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{Z}$. Durch Weglassen solcher Komponenten mit $\alpha_i = 0$ und Koordinatenwechsel $\xi_i \mapsto -\xi_i$ für $\alpha_i < 0$ können wir stets voraussetzen, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir wenden den Euklidischen Algorithmus (vgl. Übungsaufgabe 1.3) zunächst auf α_1, α_2 an und erhalten $\kappa_2 := \text{ggT}(\alpha_1, \alpha_2)$ in polynomieller Zeit. Nach Bemerkung 2.2.3 gilt

$$\text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{ggT}(\kappa_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n),$$

und wir wenden den Euklidischen Algorithmus nun auf κ_2 und α_3 an. Analog ist nach k Schritten

$$\kappa_{k+1} := \text{ggT}(\kappa_k, \alpha_{k+1}) = \text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1})$$

bestimmt. Da die binäre Größe der auftretenden Komponenten nicht zunimmt, bleibt die Laufzeit polynomiell. Nach insgesamt $n - 1$ Schritten ist somit $\kappa_n := \text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ berechnet. Ein einfacher Teilbarkeitstest von β durch κ_n zeigt nun nach Lemma 2.2.2, ob die lineare diophantische Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = \beta$ lösbar ist. \square

2.2.5 Beispiel. Wir bestimmen $\text{ggT}(10,4,7)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, und geben dabei für jeden Schritt die Matrix der entsprechenden Koordinatentransformation an. Es gilt

$$\begin{aligned} (10,4,7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (2,4,7), & (2,4,7) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (2,0,7), \\ (2,0,7) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (2,0,1), & (2,0,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die auftretenden Matrizen der Reihe nach mit C_1, C_2, C_3, C_4 , so folgt mit

$$C := C_1 C_2 C_3 C_4 = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -14 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

natürlich

$$(10,4,7)C = (0,0,1).$$

Wir erhalten insbesondere $\text{ggT}(10,4,7) = 1$; nach Lemma 2.2.2 ist die lineare diophantische Gleichung

$$10\xi_1 + 4\xi_2 + 7\xi_3 = \beta$$

daher für jedes $\beta \in \mathbb{Z}$ lösbar.

Man beachte, dass zwar gemäß dem Beweis von Lemma 2.2.4 die Größe der Komponenten des Koeffizientenvektors nicht wächst, die Einträge von C jedoch durchaus größer werden können.

Es gilt $\det(C_i) = 1$ für $i \in [4]$ und damit $\det(C) = 1$; C ist also insbesondere regulär. Mit $y := (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T := C^{-1}x$ gilt dann für jede Lösung x

$$\beta = (10,4,7)x = (10,4,7)Cy = (0,0,1)y = \eta_3.$$

Somit haben alle Lösungen die Form

$$x = Cy = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -14 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \eta_1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \eta_2 + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \beta,$$

wobei $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Z}$ beliebig sind. Da alle diese Punkte ganzzahlig sind, bilden sie genau die Lösungsmenge der gegebenen linearen diophantischen Gleichung.

Geometrisch beschreibt die ursprüngliche Gleichung über \mathbb{R} eine Hyperebene H des \mathbb{R}^3 . Die Einschränkung der Lösungsmenge auf \mathbb{Z} bedeutet den Übergang zu $H \cap \mathbb{Z}^3$. Diese Menge ist zwar für $\beta \neq 0$ kein Gitter, da sie nicht 0 enthält. Sie entsteht aber dadurch, dass das durch die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad v_2 := \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Teilgitter des \mathbb{Z}^3 durch den Translationsvektor

$$v_0 := \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \beta$$

verschoben wird.

2.3 Unimodularität

2.3.1 Definition. Sei $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $|\det(C)| = 1$. Dann heißt C **unimodular**. Die mittels C für $x \in \mathbb{Z}^n$ durch $\psi(x) := Cx$ gegebene Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **unimodulare Transformation** des \mathbb{R}^n .

2.3.2 Lemma. Sei $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ regulär. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- (a) C ist unimodular.
- (b) Für jedes $b \in \mathbb{Z}^n$ gilt $C^{-1}b \in \mathbb{Z}^n$.
- (c) Für jedes $b \in \mathbb{Z}^n$ ist das lineare diophantische Gleichungssystem $Cx = b$ lösbar.

(d) $C^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$.

Beweis: ‘(a) \Rightarrow (b)’ Wir benutzen die Cramersche Regel der Linearen Algebra (in Adjunktendarstellung). Sei $C =: (\gamma_{i,j})_{i,j \in [n]}$. Bekanntlich ist die Adjunkte

$$\text{adj}(C) = (\text{adj}(C)_{i,j})_{i,j \in [n]}$$

von C definiert durch

$$\text{adj}(C)_{j,i} := (-1)^{i+j} \det(\gamma_{k,l})_{\substack{k \in [n] \setminus \{i\} \\ l \in [n] \setminus \{j\}}} \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

und es gilt (als Folgerung aus dem Entwicklungssatz von Laplace)

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \text{adj}(C).$$

Somit folgt wegen $|\det(C)| = 1$ für $b \in \mathbb{Z}^n$

$$C^{-1}b = \frac{1}{\det(C)} \text{adj}(C)b \in \mathbb{Z}^n.$$

‘(b) \Rightarrow (c)’ (c) ist nur eine Umformulierung von (b).

‘(c) \Rightarrow (d)’ Für $i \in [n]$ ist $C^{-1}u_i$ der i -te Spaltenvektor von C^{-1} , und nach Voraussetzung gilt $C^{-1}u_i \in \mathbb{Z}^n$. Also ist C^{-1} ganzzahlig.

‘(d) \Rightarrow (a)’ Mit $\det(C), \det(C^{-1}) \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)} \in \mathbb{Z}$$

und daher $|\det(C)| = 1$. □

2.3.3 Bemerkung. *Bezüglich der Matrixmultiplikation bilden die unimodularen $n \times n$ -Matrizen des \mathbb{R}^n eine Gruppe.*

2.4 Hermitesche Normalform

2.4.1 Satz. LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG *ist in polynomieller Zeit lösbar.*

Beweis: Durch $\mathcal{I} := (n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta)$ sei eine Aufgabe von LINEARE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG gegeben. Sind alle α_i gleich 0, so ist die Aufgabe trivial. Wir setzen daher im folgenden voraus, dass nicht alle Koeffizienten 0 sind. Ferner können wir annehmen, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ gilt. Das kann durch eine unimodulare Transformation mittels einer Diagonalmatrix C_0 des Typs $(\pm u_1, \dots, \pm u_n)$ erreicht werden.

Zur Lösung der gegebenen Aufgabe verfahren wir wie in Lemma 2.2.4. Hierbei reduzieren wir sukzessive die Einträge des aktuellen Koeffizientenvektors durch Schritte des Euklidischen Algorithmus. Im k -ten Schritt des Verfahrens wird für zwei Komponenten μ, ν des aktuellen Koeffizientenvektors mit $\mu \geq \nu$ die Operation

$$\mu \leftarrow \mu - \left\lfloor \frac{\mu}{\nu} \right\rfloor \nu$$

durchgeführt. Sind μ die i te und ν die j te Komponente des aktuellen Koeffizientenvektors, so hat die zugehörige Transformationsmatrix die Gestalt

$$C_k := E_n - \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} u_j u_i^T.$$

Natürlich gilt $\det(C_k) = 1$ und $\text{size}(C_k) \leq \text{size}(\mathcal{I})$. Sei

$$\alpha^* := \max\{\alpha_i : i \in [n]\}.$$

Dann bleiben alle Einträge des aktuellen Koeffizientenvektors stets nicht negativ und kleiner oder gleich α^* . Nach $n - 1$ sukzessive Durchläufen des Euklidischen Algorithmus gemäß Lemma 2.2.4 haben wir nach Übungsaufgabe 1.3 also insgesamt höchstens p Iterationen mit $p \in O(n \log(\alpha^*))$ sowie konstant viele Operationen pro Iteration auf Zahlen der Größe $O(\alpha^*)$ durchgeführt. Sei C das Produkt

$$C := C_0 \cdot C_1 \cdot \dots \cdot C_p.$$

Mit $\kappa := \text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gibt es daher ein $i_0 \in [n]$ mit

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)C = \kappa u_{i_0}^T.$$

Ist β nicht durch κ teilbar, so ist die lineare diophantische Gleichung unzulässig. Da C unimodular ist, erhält man andernfalls mit $x = Cy$ wegen

$$\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)Cy = \kappa u_{i_0}^T y = \kappa \eta_{i_0}$$

die Lösungsmenge

$$\left\{ C \cdot \left(\eta_1, \dots, \eta_{i_0-1}, \frac{\beta}{\kappa}, \eta_{i_0+1}, \dots, \eta_n \right)^T : \eta_1, \dots, \eta_{i_0-1}, \eta_{i_0+1}, \dots, \eta_n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Zum Abschluss zeigen wir noch, dass $\text{size}(C)$ polynomiell in $\text{size}(\mathcal{I})$ beschränkt ist. Für jedes $k \in [p]$ ist C_k von der Form

$$C_k = E_n + \tau_k u_i u_j^T \quad \wedge \quad |\tau_k| \leq \alpha^*$$

mit geeigneten $i, j \in [n]$, $i \neq j$. Für $k = 0, \dots, p$ sei nun β_k das Maximum der Beträge der Koeffizienten von $C_0 \cdot C_1 \cdot \dots \cdot C_k$. Dann gilt

$$\beta_0 = 1 \quad \wedge \quad \beta_k \leq \beta_{k-1} + \alpha^* \cdot \beta_{k-1} = \beta_{k-1}(1 + \alpha^*).$$

Somit folgt

$$\beta_p \leq (1 + \alpha^*)^p,$$

also

$$\log(1 + \beta_p) \leq \log(2\beta_p) \leq \log(2) + p \cdot \log(1 + \alpha^*) \leq 1 + p \cdot \text{size}(\alpha^*) \in O(n \cdot \text{size}(\mathcal{I})^2).$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung. \square

2.4.2 Beispiel. Wie in Beispiel 2.2.5 bestimmen wir eine ganzzahlige Lösung von $10\xi_1 + 4\xi_2 + 7\xi_3 = \beta$. Die unimodulare Matrix

$$C_1 := \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -14 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die gleiche wie in Beispiel 2.2.5; zusätzlich verwenden wir aber noch eine Permutation C_2 , die die dritte Komponente zur ersten macht. Seien also

$$C_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad C := C_1 C_2 = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -2 \\ 6 & -14 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$(10,4,7)C = (10,4,7)C_1 C_2 = (0,0,1)C_2 = (1,0,0).$$

Man beachte, dass diese ‘Normalform’ des Koeffizientenvektors $(10,4,7)$ durchaus aber auch mit Hilfe anderer unimodularer Abbildungen erreicht werden kann. So erhalten wir etwa auch mit

$$C' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$(10,4,7)C' = (1,0,0).$$

Hierbei liegt eine andere Darstellung derselben Lösungsmenge und insbesondere eine andere Basis des Teilgitters aller Lösungen der homogenen diophantischen Gleichung zugrunde.

2.4.3 Bezeichnung. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Die folgenden Operationen heißen **elementare (unimodulare) Spaltenoperationen**:

- (a) Vertauschung von zwei Spalten von A ;
- (b) Multiplikation einer Spalte von A mit -1 ;
- (c) Addition eines positiven ganzzahligen Vielfachen einer Spalte von A zu einer anderen.

2.4.4 Definition. Sei $A := (\alpha_{i,j})_{i \in [m], j \in [n]} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = m$. A heißt **Hermite Normalform**³, wenn für $(i,j) \in [m] \times [n]$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a) $\alpha_{i,j} \geq 0$;
- (b) $\alpha_{i,j} = 0$ falls $j > i$;
- (c) $\alpha_{i,j} < \alpha_{i,i}$ für $j < i$.

2.4.5 Korollar. Sei $a := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine unimodulare Matrix C , so dass $a^T C$ Hermite Normalform ist. Genauer gilt

$$a^T C = \text{ggT}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) u_1^T.$$

³ Charles Hermite, 1822 - 1901.

Beweis: Die Aussage folgt gegebenenfalls unter Anwendung einer Permutation direkt aus dem Beweis von Satz 2.4.1. \square

2.4.6 Beispiel. Gegeben sei die 2×3 Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die erste Zeile ist gerade der Koeffizientenvektor aus Beispiel 2.4.2 ist, so dass wir den ersten Auflösungsschritt bereits übernehmen können. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 7 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -18 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren nun die zweite und dritte Spalte der neuen Koeffizientenmatrix mit -1 und addieren das Dreifache der zweiten zur dritten. Als Matrixgleichung erhalten wir somit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um die erhaltene Koeffizientenmatrix in Hermite Normalform zu überführen, subtrahieren wir nun noch die zweite von der ersten Spalte. Die zugehörige Transformationsmatrix ist $E_3 - u_2 u_1^T$. Multipliziert man nun alle Transformationsmatrizen, so erhält man mit

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -4 & 6 & -17 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

die Darstellung

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist diese Hermite Normalform eindeutig? Seien $C' \in \mathbb{Z}^{3 \times 3}$ unimodular, $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{N}_0$ mit $\beta < \gamma$ sowie

$$AC' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Ferner seien

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \wedge w_1 := \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \wedge w_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Da C und C' unimodular sind, erzeugen v_1, v_2 nach Bemerkung ?? dasselbe Teilgitter von \mathbb{Z}^2 wie w_1, w_2 . Insbesondere gibt es also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = v_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha \\ \lambda_1 \beta + \lambda_2 \gamma \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\lambda_1 = 0$ und somit $\gamma | 6$. Umgekehrt kann man auch w_2 als ganzzahlige Linearkombination von v_1, v_2 darstellen, und man erhält analog $6 | \gamma$. Insgesamt folgt daher $\gamma = 6$.

Ebenso gibt es auch $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha \\ \lambda_1 \beta + 6\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\lambda_1 = 1 \quad \wedge \quad \alpha = 1 \quad \wedge \quad 1 = \beta + 6\lambda_2.$$

Da ferner $0 \leq \beta < 6$ gilt, erhält man auch noch $\lambda_2 = 0$ und $\beta = 1$. Also ist die Hermite Normalform eindeutig.

2.4.7 Satz. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = m$.

- (a) Es gibt eine unimodulare Matrix C , so dass AC Hermite Normalform ist.
 (b) Seien C_1, C_2 unimodulare Matrizen, so dass AC_1 und AC_2 Hermite Normalformen sind. Dann gilt $AC_1 = AC_2$.

2.4.8 Bezeichnung. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = m$ und $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ unimodular, so dass AC Hermite Normalform ist. Dann heißt AC die **Hermite Normalform** von A .
 Das Problem

Gegeben: $m, n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = m$;
 Auftrag: Bestimme die Hermite Normalform von A

wird mit HERMITE NORMALFORM bezeichnet.

2.4.9 Satz. HERMITE NORMALFORM kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

2.4.10 Satz. LINEARES DIOPHANTISCHES GLEICHUNGSSYSTEM kann in polynomieller Zeit gelöst werden. Ferner kann man zu jedem zulässigen linearen diophantischen Gleichungssystem $Ax = b$ in polynomieller Zeit ein $k \in \mathbb{N}$, eine 'partikuläre Lösung' v_0 und linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Z}^n$ bestimmen, so dass

$$\{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b\} = \left\{ v_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z} \right\}$$

gilt.

Beweis: Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Z}^m$. Mittels Gauß-Elimination bestimmen wir zunächst $\text{rang}(A)$, identifizieren eine $\text{rang}(A) \times n$ Teilmatrix A' von vollem Rang und überprüfen, ob $Ax = b$ über \mathbb{Q} lösbar ist. Falls das nicht der Fall ist, gibt es natürlich auch keine ganzzahlige Lösung. Andernfalls sei b' der zu den Zeilen von A' gehörige Teilvektor von b . Da die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $A'x = b'$ (über \mathbb{R} , \mathbb{Q} bzw. \mathbb{Z}) übereinstimmen, können wir im folgenden voraussetzen, dass $\text{rang}(A) = m$ gilt. Mittels Satz 2.4.9 bestimmen wir nun in polynomieller Zeit die Hermite Normalform B von A und eine unimodulare Matrix $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ mit $AC = B$. Sei $B_1 \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ mit $B = (B_1, 0)$. Das lineare diophantische Gleichungssystem $Ax = b$ ist nun genau dann lösbar, wenn $B_1^{-1}b \in \mathbb{Z}^m$ gilt.

Sei nun

$$y_0 := \begin{pmatrix} B_1^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^n.$$

Dann gilt

$$\{y : By = b\} = y_0 + \{\lambda_{m+1}u_{m+1} + \dots + \lambda_n u_n : \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}\}$$

und somit

$$\{x \in \mathbb{Z}^n : Ax = b\} = Cy_0 + \{\lambda_{m+1}Cu_{m+1} + \dots + \lambda_n Cu_n : \lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mit $v_0 := Cy_0$ und $v_i := Cu_{m+i}$ folgt damit auch die zweite Behauptung. \square

3 Ganzzahlige Hülle und ganzzahlige Polyeder

3.1 Ganzzahlige Hülle

3.1.1 Bezeichnung. Durch $\mathcal{I} := (m, n, A, b, c)$ sei die ILP-Aufgabe $\max\{c^T x : x \in \mathbb{Z}^n \wedge Ax \leq b\}$ spezifiziert. Die LP-Aufgabe $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n \wedge Ax \leq b\}$ heißt **LP-Relaxation** von \mathcal{I} . Das \mathcal{H} -Polyeder $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ wird zu \mathcal{I} **gehöriges Polyeder** genannt.

3.1.2 Bemerkung. Seien P ein Polyeder des \mathbb{R}^n und $c \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\sup_{x \in P \cap \mathbb{Z}^n} c^T x = \sup_{x \in \text{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)} c^T x.$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus der Definition der konvexen Hülle. □

3.1.3 Definition. Sei P ein Polyeder des \mathbb{R}^n . Dann heißt

$$I(P) := \text{conv}(\mathbb{Z}^n \cap P)$$

die **ganzzahlige Hülle** [engl.: integer hull] von P . Bisweilen wird $I(P)$ auch mit $I(P)$ bezeichnet, um Doppelindizes zu vermeiden.

3.1.4 Beispiel. Sei P das durch die Ungleichungen

$$\xi_1 - \xi_2 \leq \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$7\xi_1 + 3\xi_2 \geq \frac{21}{2} \quad (2)$$

$$\xi_2 \leq \frac{7}{2} \quad (3)$$

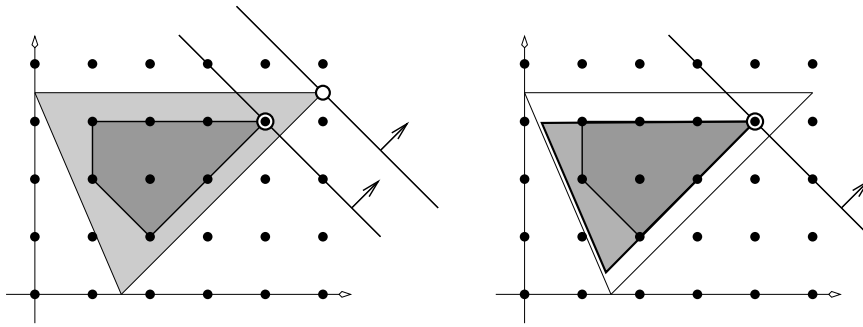
gegebene Polytop. Es gilt

$$P \cap \mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

$I(P)$ besitzt somit die (irredundante) \mathcal{H} -Darstellung

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &\leq 1 \\ \xi_1 + \xi_2 &\geq 3 \\ \xi_1 &\geq 1 \\ \xi_2 &\leq 3, \end{aligned}$$

ist also insbesondere ein Polyeder. Man beachte, dass die erste und vierte Bedingung durch Rundung der rechten Seiten von (1) bzw. (3) auf die jeweils nächst kleinere ganze Zahl 1 bzw. 3 entstehen. Rundet man (2) (wegen der umgekehrten Ungleichung) auf die nächst größere ganze Zahl 11, so erhält man ein Polytop Q mit $I(P) = I(Q) \subsetneq Q \subsetneq P$.



3.1 Abbildung. Links: P und $I(P)$; markiert sind jeweils auch die Maximalpunkte der durch c gegebenen Zielfunktion. Rechts: Q und $I(Q) = I(P)$. Die Optima der Zielfunktion über $I(Q)$ und Q stimmen überein.

Mit $c := (1,1)^T$ gilt natürlich

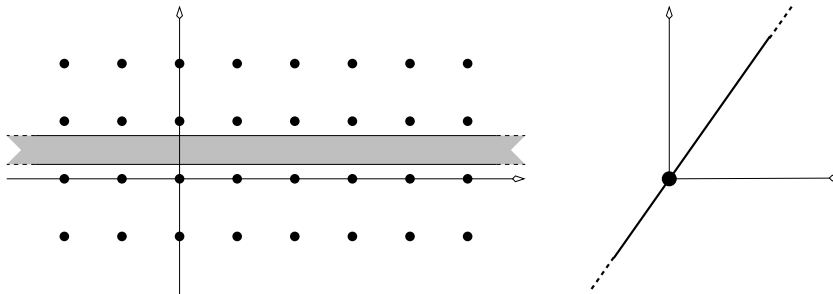
$$\max_{x \in P} c^T x = \frac{17}{2} \quad \wedge \quad \max_{x \in P \cap \mathbb{Z}^2} c^T x = \max_{x \in I(P)} c^T x = 7.$$

Man beachte, dass der Optimalpunkt $(4,3)^T$ bez. $I(P)$ auch bereits optimal bez. Q ist.

3.1.5 Beispiel. Gegeben seien die beiden ILP-Aufgaben

$$\begin{array}{ll} \max & \xi_1 \\ & 3\xi_2 \leq 4 \\ & 4\xi_2 \geq 1 \\ & \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \max & \xi_1 \\ & -\sqrt{2}\xi_1 + \xi_2 \leq 0 \\ & \sqrt{2}\xi_1 - \xi_2 \leq 0 \\ & \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z}; \end{array}$$

die zugehörigen Polyeder seien P bzw. Q . P ist ein horizontaler Streifen. Die Zielfunktion φ ist über P also unbeschränkt; es gilt aber $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, d.h. die gegebene ILP-Aufgabe ist unzulässig.



3.2 Abbildung. φ ist über P und Q unbeschränkt; $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ und $Q \cap \mathbb{Z}^n = \{0\}$.

Q ist eine Gerade mit irrationaler Steigung $\sqrt{2}$; ihr einziger Gitterpunkt ist 0. Die ILP-Aufgabe hat also das Optimum 0, während ihre LP-Relaxation beliebig große Zielfunktionswerte enthält.

3.1.6 Definition. Eine \mathcal{H} -Darstellung (m,n,A,b) bzw. eine \mathcal{V} -Darstellung (n,V,S) eines Polyeders P heißt **rational** bzw. **ganzzahlig**, falls alle Komponenten von A und b bzw. alle Vektoren aus V und S rational bzw. ganzzahlig sind.

3.1.7 Satz. Sei $P \subset \mathbb{R}^n$. P besitzt genau dann eine rationale \mathcal{H} -Darstellung, wenn P eine rationale \mathcal{V} -Darstellung besitzt.

Beweis: Die Aussage folgt aus dem Struktursatz der konvexen Analysis. \square

Hiermit können wir ‘verkürzt’ (d.h. mittels nur zwei von vier Fällen) rationale und ganzzahlige Polyeder definieren.

3.1.8 Definition. Ein Polyeder P heißt **rational**, falls P eine rationale \mathcal{H} -Darstellung besitzt. Ein Polyeder P heißt **ganzzahlig**, falls P eine ganzzahlige \mathcal{V} -Darstellung besitzt.¹

3.1.9 Satz. Sei P ein rationales Polyeder. P ist genau dann ganzzahlig, wenn $P = I(P)$ gilt.

3.1.10 Beispiel. Sei $n \geq 2$. Das Polyeder P des \mathbb{R}^n sei gegeben durch das System

$$\begin{aligned} \xi_i + \frac{1}{2}\xi_j &\leq 1 & (i,j \in [n] \wedge i \neq j) \\ -\xi_i + \frac{1}{2}\xi_j &\leq 1 & (i,j \in [n] \wedge i \neq j) \\ \xi_i - \frac{1}{2}\xi_j &\leq 1 & (i,j \in [n] \wedge i \neq j) \\ -\xi_i - \frac{1}{2}\xi_j &\leq 1 & (i,j \in [n] \wedge i \neq j) \end{aligned}$$

von insgesamt $m := 4n(n-1)$ linearen Ungleichungen. Geometrisch ist P Durchschnitt der $2n$ Translate

$$\pm 2u_i + \text{pos}([-1,1]^{i-1} \times \{\mp 2u_i\} \times [-1,1]^{n-i})$$

von Kegeln über geeignet eingebetteten $(n-1)$ -dimensionalen Standardwürfeln; vgl. Abbildung 3.3. Offenbar gilt

$$\pm u_i \in P.$$

Addition der ersten und dritten bzw. zweiten und vierten Ungleichung für feste $i,j \in [n]$ mit $i \neq j$ liefert $-1 \leq \xi_i \leq 1$, d.h.

$$I(P) \subset P \subset [-1,1]^n.$$

Damit liegen insbesondere alle Gitterpunkte von P im Einheitswürfel, sind also aus $\{-1,0,1\}^n$. Angenommen, es gibt einen Vektor $v := (\nu_1, \dots, \nu_n)^T \in \{-1,0,1\}^n$ in $I(P)$ mit $i,j \in [n]$, $i \neq j$ und $\nu_i, \nu_j \in \{-1,1\}$. Dann erfüllt v die Ungleichung

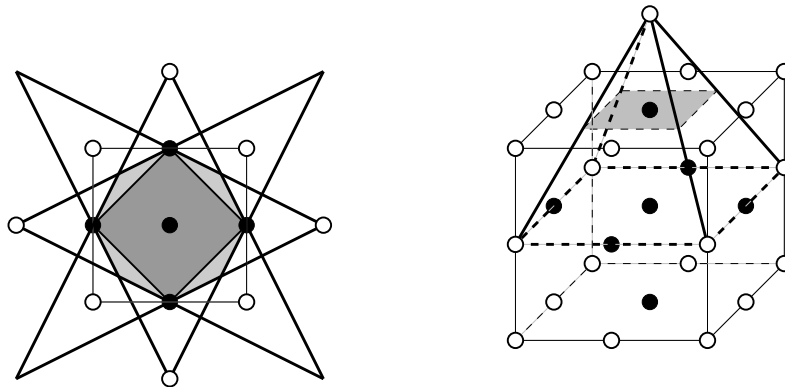
$$\frac{\nu_i}{|\nu_i|}\xi_i + \frac{1}{2} \frac{\nu_j}{|\nu_j|}\xi_j = \frac{3}{2} > 1,$$

d.h. $v \notin P$. Insgesamt folgt somit

$$I(P) = \text{conv}(\{\pm u_1, \dots, \pm u_n\}) = Q_n.$$

Das Standard-Kreuzpolytop Q_n besitzt 2^n Facetten. Die Anzahl der Facetten von $I(P)$ wächst also exponentiell mit der Anzahl der Facetten von P . Da die Einträge von (A,b) nur konstante binäre Größe besitzen, ist die binäre Größe $\text{size}(\mathcal{I})$ der angegebenen \mathcal{H} -Darstellung von P nur polynomiell in n , d.h. die Facettenzahl von $I(P)$ ist auch in $\text{size}(\mathcal{I})$ exponentiell.

¹ Wir erlauben hier auch wieder $P = \emptyset$, da per Definition $(n,\emptyset,\{0\})$ eine ganzzahlige \mathcal{V} -Darstellung von \emptyset ist.



3.3 Abbildung. Links: Die vollständige Konstruktion von P in Dimension 2. Rechts: zu einer Facette des Standardwürfels gehörige Konstruktion.

3.2 Ganzzahlige Polyeder und totale Unimodularität

3.2.1 Satz. Das Problem

Gegeben: Ein rationales \mathcal{H} -Polytop P .

Frage: Gilt $P = I(P)$?

ist NP-schwierig.

Beweis: Papadimitriou und Yannakakis, *Combinatorica* 10 (1990), 107 - 109 □

3.2.2 Bezeichnung. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ sei

$$P(b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}.$$

3.2.3 Definition. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = n$. Die Matrix A heißt **unimodular**, wenn für jede Teilmenge $B \subset [m]$ mit $|B| = n$

$$\det(A_B) \in \{-1, 0, 1\}$$

gilt.

3.2.4 Beispiel. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

ist unimodular, denn die drei 2×2 Teilmatrizen haben Determinanten $-1, 1$ bzw. -1 .

3.2.5 Satz. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = n$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (a) A ist unimodular.
- (b) Für jedes $b \in \mathbb{Z}^m$ ist jede Ecke von $P(b)$ ganzzahlig.

Beweis: ‘ \Rightarrow ’ Seien $b \in \mathbb{Z}^m$, v eine Ecke von $P(b)$ und $B \subset [m]$ mit $|B| = n$, $\text{rang}(A_B) = n$ und $v = A_B^{-1}b_B$. Nach Lemma 2.3.2 ist A_B^{-1} ganzzahlig, und es folgt $v \in \mathbb{Z}^n$.

‘ \Leftarrow ’ Seien $B \subset [m]$ mit $|B| = n$ und $\text{rang}(A_B) = n$; o.B.d.A. sei $B = [n]$. Für $i \in [n]$ seien ferner

$$v_i := A_B^{-1}u_i \quad \wedge \quad N := [m] \setminus B \quad \wedge \quad b_B := u_i \quad \wedge \quad b_N := \lfloor A_N v_i \rfloor + \mathbb{1} \quad \wedge \quad b := \begin{pmatrix} b_B \\ b_N \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$A_B v_i = u_i \quad \wedge \quad A_N v_i < \lfloor A_N v_i \rfloor + \mathbb{1},$$

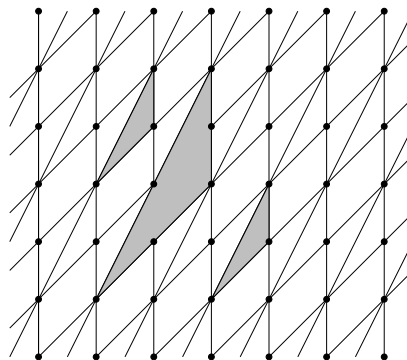
also $Av_i \leq b$, und v_i ist eine Ecke von $P(b)$. Nach Voraussetzung ist daher v_i für jedes $i \in [n]$ ganzzahlig, es folgt $A_B^{-1} \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, und nach Lemma 2.3.2 ist A_B unimodular. \square

3.2.6 Beispiel. (Fortsetzung von Beispiel 3.2.4) Nach Satz 3.2.5 sind die durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

gegebenen Polyeder für alle $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{Z}$ ganzzahlig. Abbildung 3.4 zeigt sie für die rechten Seiten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$



3.4 Abbildung. Restriktionshalbebenen von Beispiel 3.2.4 für verschiedene ganzzahlige rechte Seiten.

3.2.7 Lemma. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ unimodular, $B \subset [m]$, so dass A_B regulär ist. Dann ist für jedes $k \in [n]$ jede reguläre $k \times k$ Teilmatrix von AA_B^{-1} unimodular.

Beweis: Nach Lemma 2.3.2 ist AA_B^{-1} unimodular. Ferner enthält diese Matrix in den zu B gehörigen Zeilen eine StandardEinheitsmatrix E_n .

Seien nun $k \in [n]$ und C eine $k \times k$ Teilmatrix von AA_B^{-1} . Ist C singulär, so gilt $\det(C) = 0$. Wir nehmen daher im folgenden an, dass C den Rang k besitzt. I und J bezeichnen die Mengen der zu C gehörigen Zeilen- bzw. Spaltenindizes, d.h. $C = (\gamma_{i,j})_{i \in I, j \in J}$. Nach dem Steinitzischen Basisergänzungssatz gibt es $n - k$ Zeilen der Einheitsmatrix E_n von AA_B^{-1} , die C zu einer regulären $n \times n$ Matrix \hat{C} ergänzen, deren Einträge $\hat{\gamma}_{i,j}$ für $i \in I$ und $j \notin J$ gleich 0 sind. Da AA_B^{-1} unimodular ist, gilt

$$|\det(C)| = |\det(\hat{C})| = 1.$$

□

3.2.8 Definition. Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heißt **total unimodular** [engl.: totally unimodular], wenn für jede quadratische Teilmatrix C von A

$$\det(C) \in \{-1, 0, 1\}$$

gilt.

3.2.9 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular, und es gelte $\text{rang}(A) = n$. Dann ist A unimodular.

3.2.10 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ total unimodular. Dann gilt $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$. Ferner ist jede Matrix \hat{A} , die aus A durch Streichen von Zeilen und Spalten entsteht, total unimodular.

3.2.11 Beispiel. Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

aus Beispiel 3.2.4 ist zwar unimodular, aber nicht total unimodular, da nicht alle Einträge aus $\{-1, 0, 1\}$ sind. Führen wir aber eine Transformation gemäß Lemma 3.2.7 durch, so erhalten wir eine total unimodulare Matrix. Tatsächlich gilt etwa mit $B = \{2, 3\}$

$$AA_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

AA_B^{-1} ist also tatsächlich total unimodular.

3.2.12 Bemerkung. Die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn

$$\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$$

unimodular ist.

Beweis: '⇒' Sei C eine reguläre $n \times n$ Teilmatrix von $\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$. Durch Entwicklung der Determinante nach den zur Einheitsmatrix gehörenden Zeilen folgt $|\det(C)| = 1$.

'⇐' folgt direkt aus Lemma 3.2.7 durch Anwendung auf die Basisteilmatrix E_n . □

3.2.13 Korollar. Die Matrix $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ alle Ecken von

$$\{x : Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$$

ganzzahlig sind.

Beweis: Nach Bemerkung 3.2.12 und Satz 3.2.5 ist A genau dann total unimodular, wenn $\{x : Ax \leq b \wedge x \geq c\}$ für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{Z}^n$ ganzzahlig ist. Somit folgt '⇒'.

Zum Beweis von '⇐' zeigen wir noch, dass aus der Ganzzahligkeit der Ecken von

$$\{x : Ax \leq b \wedge x \geq 0\}$$

für jedes $b \in \mathbb{Z}^m$ die Ganzzahligkeit aller Ecken von

$$\{x : Ax \leq b \wedge x \geq c\}$$

für alle $b \in \mathbb{Z}^m$ und $c \in \mathbb{Z}^n$ folgt. Nun gilt natürlich

$$\begin{pmatrix} A \\ -E_n \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} A \\ -E_n \end{pmatrix} (x - c) \leq \begin{pmatrix} b - Ac \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Ganzzahligkeit der Ecken eines Polyeders invariant unter Translation um einen ganzzahligen Vektor ist, folgt die Behauptung. \square

3.3 Charakterisierung der totalen Unimodularität

3.3.1 Bemerkung. Sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, und \hat{A} sei eine der folgenden Matrizen

$$A^T, \quad -A, \quad (A, E_m), \quad \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix}.$$

Dann ist A genau dann total unimodular, wenn \hat{A} total unimodular ist.

3.3.2 Satz. Sei $A = (a_1, \dots, a_m)^T \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Die Matrix A ist genau dann total unimodular, wenn es für jede nicht leere Indexmenge $I \subset [m]$ eine Partition (I_1, I_2) von I gibt mit

$$\sum_{i \in I_1} a_i - \sum_{i \in I_2} a_i \in \{0, \pm 1\}^n.$$

Beweis: '⇒' Sei $I \subset [m]$ nicht leer. Da wir zeigen wollen, dass für die gesuchte Partition (I_1, I_2) von I die beiden Summen $\sum_{i \in I_1} a_i$ und $\sum_{i \in I_2} a_i$ fast übereinstimmen, setzen wir

$$Q := \left\{ y \in \mathbb{R}^{|I|} : \left[\frac{1}{2} A_I^T \mathbf{1} \right] \leq A_I^T y \leq \left[\frac{1}{2} A_I^T \mathbf{1} \right] \wedge 0 \leq y \leq \mathbf{1} \right\}.$$

Nach den Bemerkungen 3.2.10 und 3.3.1 ist mit A auch die Matrix

$$\begin{pmatrix} A_I^T \\ -A_I^T \\ E_n \\ -E_n \end{pmatrix}$$

total unimodular, und nach Korollar 3.2.13 ist Q ganzzahlig. Da der Vektor $\frac{1}{2}\mathbf{1}$ in Q enthalten ist, ist $Q \neq \emptyset$ und nach dem Satz von Minkowski konvexe Hülle seiner Ecken. Sei $v = (\nu_1, \dots, \nu_{|I|})^T$ eine Ecke von Q . Dann gilt $v \in \{0,1\}^{|I|}$, und wir setzen

$$I_1 := \{i \in I : \nu_i = 0\} \quad \wedge \quad I_2 := I \setminus I_1.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\left\lfloor \frac{1}{2}A_I^T \mathbf{1} \right\rfloor \leq \sum_{i \in I_2} a_i = A_I^T v \leq \left\lceil \frac{1}{2}A_I^T \mathbf{1} \right\rceil.$$

Wegen

$$\sum_{i \in I_1} a_i - \sum_{i \in I_2} a_i = \sum_{i \in I} a_i - 2 \sum_{i \in I_2} a_i = A_I^T \mathbf{1} - 2A_I^T v$$

folgt somit

$$A_I^T \mathbf{1} - 2 \left\lceil \frac{1}{2}A_I^T \mathbf{1} \right\rceil \leq \sum_{i \in I_1} a_i - \sum_{i \in I_2} a_i \leq A_I^T \mathbf{1} - 2 \left\lfloor \frac{1}{2}A_I^T \mathbf{1} \right\rfloor$$

und daher

$$\sum_{i \in I_1} a_i - \sum_{i \in I_2} a_i \in \{0, \pm 1\}^n.$$

‘ \Leftarrow ’ Wir zeigen die Determinantenbedingung für jede $k \times k$ -Teilmatrix mittels vollständiger Induktion nach k . Durch Anwendung der Partitionsbedingung auf alle Indexmengen I der Kardinalität 1 folgt $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$. Also gilt die Aussage für alle 1×1 Teilmatrizen. Seien nun $k \geq 2$ und C eine beliebige $k \times k$ -Teilmatrix von A . Ist C singular, so gilt $\det(C) = 0$. Sei daher im folgenden C regulär. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir voraus, dass $C =: (\alpha_{i,j})_{i,j \in [k]}$ ist.

Wir zeigen nun gemäß Korollar 2.3.2, dass C^{-1} ganzzahlig ist. Seien daher $l \in [k]$ beliebig und $c^T = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ die l -te Zeile von C^{-1} . Es gilt

$$c^T := u_l^T C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} u_l^T \text{adj}(C),$$

und da nach Induktionsvoraussetzung alle Komponenten von $\text{adj}(C)$ aus $\{0, \pm 1\}$ sind, folgt

$$\det(C) \cdot c \in \{0, \pm 1\}^k.$$

Seien nun

$$I := \{i \in [k] : \gamma_i \neq 0\}$$

und (I_1, I_2) eine Partition von I mit

$$\sum_{i \in I_1} a_i - \sum_{i \in I_2} a_i \in \{0, \pm 1\}^n.$$

Nun gilt für $j \in [k] \setminus \{l\}$ natürlich

$$(\det(C)) \cdot c^T C u_j = 0.$$

Da alle Einträge von $\det(C) \cdot c$ und C aus $\{0, \pm 1\}$ sind und $c^T C = u_l^T$ gilt, folgt

$$|\{i \in I : \alpha_{i,j} \neq 0\}| \equiv 0 \pmod{2}.$$

Somit gilt für jedes $j \in [k] \setminus \{l\}$

$$\sum_{i \in I_1} \alpha_{i,j} - \sum_{i \in I_2} \alpha_{i,j} = 0.$$

Da C regulär ist, gilt ferner

$$\left| \sum_{i \in I_1} \alpha_{i,l} - \sum_{i \in I_2} \alpha_{i,l} \right| = 1.$$

Sei nun $b := (\beta_1, \dots, \beta_k)^T$ definiert durch

$$\beta_i := \begin{cases} 1 & \text{für } i \in I_1; \\ -1 & \text{für } i \in I_2; \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases}$$

für $i \in [k]$. Dann folgt $b^T C \in \{-u_l^T, u_l^T\}$, also

$$b \in \{-c, c\}.$$

Somit ist $c \in \{0, \pm 1\}^k$, und da $l \in [k]$ beliebig gewählt war, folgt insbesondere $C^{-1} \in \mathbb{Z}^{k \times k}$. \square

Als wichtiger Spezialfall von Satz 3.3.2 ergibt sich folgendes Korollar.

3.3.3 Korollar. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i \in [m], j \in [n]} \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$, und jede Spalte von A enthalte höchstens zwei von 0 verschiedenen Koeffizienten. Die Matrix A ist genau dann total unimodular, wenn es eine Partition (I_1, I_2) von $[m]$ gibt, so dass für alle $i_1, i_2 \in [m]$ mit $i_1 \neq i_2$ und $j \in [n]$ mit $\alpha_{i_1,j}, \alpha_{i_2,j} \neq 0$ gilt

$$\alpha_{i_1,j} \cdot \alpha_{i_2,j} < 0 \iff \{i_1, i_2\} \subset I_1 \vee \{i_1, i_2\} \subset I_2.$$

Beweis: ‘ \Rightarrow ’ Ist A total unimodular, so gibt es nach Satz 3.3.2 eine Partition (I_1, I_2) von $[m]$ mit

$$\sum_{i \in I_1} a_i - \sum_{i \in I_2} a_i \in \{0, \pm 1\}^n.$$

Für jede Spalte mit genau zwei von 0 verschiedene Einträgen können bei gleichen Vorzeichen die zu diesen zugehörigen Zeilenindizes nicht in derselben Partitionsmenge liegen, bei verschiedenen Vorzeichen nicht in verschiedenen. (I_1, I_2) erfüllt also die behauptete Bedingung.

‘ \Leftarrow ’ Sind (I_1, I_2) eine entsprechende Partition von $[m]$ und $I \subset [m]$ mit $I \neq \emptyset$, so gilt

$$\sum_{i \in I_1 \cap I} a_i - \sum_{i \in I_2 \cap I} a_i \in \{0, \pm 1\}^n.$$

Nach Satz 3.3.2 ist A somit total unimodular. \square

3.3.4 Beispiel. *Die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt in jeder Spalte höchstens zwei von 0 verschiedene Einträge. Die Partition $(\{1,3\}, \{2,4\})$ der Zeilenindexmenge $\{1,2,3,4\}$ erfüllt die Bedingung aus Korollar 3.3.3; A ist also total unimodular.

3.3.5 Satz. *Das Problem*

Gegeben: $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$;

Frage: Ist A total unimodular?

kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

Beweis: Schrijver, Satz 20.3, S. 290. □

3.4 Einige Anwendungen

3.4.1 Satz. Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Dann ist seine (Knoten-Kanten) Inzidenzmatrix S_G total unimodular.

Beweis: Jede Spalte von S_G enthält genau zwei von 0 verschiedene Einträge. Da diese verschiedene Vorzeichen haben, setzen wir $I_1 = \{1, \dots, |V|\}$ und $I_2 = \emptyset$. Dann erfüllt (I_1, I_2) das Kriterium von Korollar 3.3.3. □

3.4.2 Beispiel. In *Sektion 1.3* lag eine Matchingaufgabe in einem bipartiten Graphen zugrunde. Die zugehörige ILP-Aufgabe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \gamma_{i,j} \xi_{i,j} \\ Ax \quad & \leq \mathbf{1} \\ x \quad & \in \{0,1\}^{12}, \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

die Variable $\xi_{i,j}$ gehört dabei zur $(3(i-1) + j)$ -ten Spalte.

Offenbar entsprechen die ersten vier Zeilen den Zuordnungsrestriktionen der Personen vom Geschlecht Γ_1 , die letzten drei denen für Geschlecht Γ_2 und die Spalten den möglichen Paaren. Wählt man die (Geschlechter trennende) Partition $I_1 := \{1,2,3,4\}$ und $I_2 := \{5,6,7\}$, so zeigt Korollar 3.3.3, dass A total unimodular ist. Werden also die 0-1-Bedingungen

$$x \in \{0,1\}^{12}$$

durch die Nichtnegativitätsbedingungen

$$x \geq 0$$

ersetzt (die Bedingungen $x \leq \mathbf{1}$ sind redundant), so erhält man nach Korollar 3.2.13 eine äquivalente LP-Aufgabe.

3.4.3 Bezeichnung. Seien X eine nichtleere endliche Menge, $k := |X|$, $\tau : [k] \rightarrow X$ eine Ordnung auf X , und die Abbildung $\iota : 2^X \rightarrow \{0,1\}^k$ sei für jedes $M \in 2^X$ definiert durch

$$\iota(M) := x(M) := (\xi_1, \dots, \xi_k)^T \quad \wedge \quad \xi_i := \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau(i) \notin M; \\ 1 & \text{falls } \tau(i) \in M; \end{cases} \quad (i \in [k]).$$

Für jedes $M \in 2^X$ heißt $x(M)$ **Inzidenzvektor** von M .

3.4.4 Bemerkung. Seien $G = (V, E, \phi)$ ein gewichteter Graph, $V := \{v_1, \dots, v_n\}$, $E := \{e_1, \dots, e_m\}$ und $c := (\phi(e_1), \dots, \phi(e_m))^T$. Dann ist jeder zulässige Punkt der ILP-Aufgabe

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ S_G x \quad & \leq \mathbf{1} \\ x \quad & \geq 0 \\ x \quad & \in \mathbb{Z}^m \end{aligned}$$

Inzidenzvektor eines Matchings und umgekehrt, und die Zielfunktionswerte stimmen überein.

3.4.5 Satz. Sei $G = (V, E)$ ein (ungerichteter) Graph. Die Inzidenzmatrix S_G von G ist genau dann total unimodular, wenn G bipartit ist.

Beweis: '⇒' Da S_G nach Voraussetzung total unimodular ist und in jeder Spalte genau zwei von 0 verschiedene Einträge besitzt, können wir die Charakterisierung von Korollar 3.3.3 verwenden. Es gibt also eine Partition (I_1, I_2) von $\{1, \dots, |V|\}$ mit der Eigenschaft, dass für keine Spalte von S_G die beiden Einträge 1 in derselben Teilmenge der Partition liegen. Das bedeutet aber, dass es keine Kante $e := \{v_i, v_j\}$ aus E gibt mit $i, j \in I_1$ oder $i, j \in I_2$. Also ist G bipartit mit entsprechender Partition

$$V_1 := \{v_i : i \in I_1\} \quad \wedge \quad V_2 := \{v_i : i \in I_2\}.$$

'⇐' Sei (V_1, V_2) eine zu G gehörige Partition von V , d.h. es gibt keine Kanten zwischen zwei Knoten in V_1 und keine zwischen zwei Knoten in V_2 . Seien

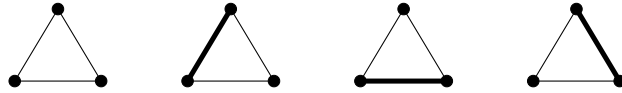
$$I_1 := \{i : v_i \in V_1\} \quad \wedge \quad I_2 := \{i : v_i \in V_2\}.$$

Dann ist (I_1, I_2) eine Partition von $\{1, \dots, |V|\}$, die die Bedingung von Korollar 3.3.3 erfüllt. Also ist S_G total unimodular. \square

3.4.6 Beispiel. Gegeben sei der vollständige Graph K_3 mit drei Knoten. Gesucht ist ein kardinalitätsmaximales Matching. Da K_3 nur genau vier verschiedene Matchings enthält, nämlich

$$M_0 := \emptyset, \quad M_1 := \{e_1\}, \quad M_2 := \{e_2\}, \quad M_3 := \{e_3\},$$

ist die Aufgabe natürlich leicht zu lösen: M_1 , M_2 und M_3 sind kardinalitätsaximal.



3.5 Abbildung. Matchings M_0 , M_1 , M_2 , M_3 .

Bei geeigneter Nummerierung der Knoten und Kanten ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

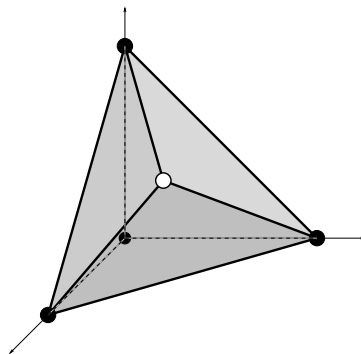
die Inzidenzmatrix von K_3 . Ihre Determinante hat den Wert 2; die Matrix ist also nicht unimodular. Tatsächlich ist die (in diesem Fall eindeutig bestimmte) optimale Lösung x^* der zugehörigen LP-Aufgabe

$$\begin{array}{rcll} \max & \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 & & \\ \xi_1 & + & \xi_2 & \leq 1 \\ & & \xi_2 & + \xi_3 \leq 1 \\ \xi_1 & & & + \xi_3 \leq 1 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 & \geq 0 \end{array}$$

auch nicht ganzzahlig; es gilt

$$x^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)^T;$$

vgl. Abbildung 3.6.



3.6 Abbildung. Das zu der LP-Aufgabe gehörende Polytop ist nicht ganzzahlig.

3.4.7 Definition. Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $\beta : V \rightarrow \mathbb{N}$. Eine Teilmenge M von E heißt **β -Matching** (oder mit $V := \{v_1, \dots, v_n\}$ und $b = (\beta(v_1), \dots, \beta(v_n))^T$ meistens auch **b -Matching**) [engl.: *b-matching*] in G , wenn gilt

$$v \in V \implies |M \cap \delta(G, v)| \leq \beta(v).$$

Sind $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ und M^* ein β -Matching in G , so heißt M^* genau dann ein (bez. ϕ) **maximales β -Matching**, wenn M^* die Zielfunktion

$$\varphi(M) := \sum_{e \in M} \phi(e)$$

unter allen β -Matchings in G maximiert.

Sind speziell $\phi \equiv 1$ und M^* ein bez. ϕ maximales β -Matching, so heißt M^* ein **kardinalitätsmaximales β -Matching**.

3.4.8 Korollar. Seien $G := (V, E, \phi)$ ein gewichteter bipartiter Graph, $V := \{v_1, \dots, v_n\}$, $E := \{e_1, \dots, e_m\}$, $c := (\phi(e_1), \dots, \phi(e_m))^T$ und $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T \in \mathbb{N}^n$. Ferner sei x^* eine optimale Basislösung von

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ S_G x &\leq b \\ x &\leq \mathbf{1} \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Dann ist x^* Inzidenzvektor eines bez. ϕ maximalen b -Matchings.

3.4.9 Beispiel. In einer Aufgabe des Rekonstruktionsproblems für kristalline Strukturen aus Sektion 1.1 seien Liniensummandaten in $m = 2$ Gitterrichtungen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ gegeben, aus denen eine zugrunde liegende Punktmenge rekonstruiert werden soll. Für $j = 1, 2$ seien (wie in Beispiel ??) $T_{j,1}, \dots, T_{j,k_j}$ alle Gittergeraden parallel zu z_j , für die die gegebenen Messungen von 0 verschieden sind. Die zugehörigen Messdaten seien $\beta_{j,1}, \dots, \beta_{j,k_j}$. Ferner sei wieder

$$K := \mathbb{Z}^2 \cap \bigcap_{j=1}^2 \bigcup_{i=1}^{k_j} T_{j,i}.$$

Wir modellieren die zugehörige Aufgabe als b -Matching. Seien daher

$$V := \{T_{1,1}, \dots, T_{1,k_1}\} \cup \{T_{2,1}, \dots, T_{2,k_2}\}$$

sowie

$$E := \left\{ \{T_{1,p}, T_{2,q}\} : p = 1, \dots, k_1 \wedge q = 1, \dots, k_2 \wedge T_{1,p} \cap T_{2,q} \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

Dann entspricht E mittels der bijektiven Abbildung

$$\{T_{1,p}, T_{2,q}\} \mapsto T_{1,p} \cap T_{2,q}$$

der Menge K . Ist also

$$G := (V, E),$$

so sind die Knoten von G die Trägergeraden $T_{j,i}$, und zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die zugehörigen Geraden in einem Punkt schneiden. Somit ist G bipartit. Ist also

$$\beta : V \rightarrow \mathbb{N}$$

definiert durch

$$j = 1, 2 \wedge i = 1, \dots, k_j \Rightarrow \beta(T_{j,i}) := \beta_{j,i},$$

so ist jede Lösung des Rekonstruktionsproblems ein β -Matching in G und umgekehrt.

Für $m = 2$ kann nach Korollar 3.4.8 das Rekonstruktionsproblem der Diskreten Tomographie daher mittels linearer Programmierung gelöst werden.

3.4.10 Korollar. (Satz von König und Egerváry)

Sei $G := (V, E)$ ein bipartiter Graph. Dann stimmt die Kardinalität eines kardinalitätsmaximalen Matchings in G mit der Kardinalität einer minimalen Knotenmenge $U \subset V$ überein, die die Eigenschaft hat, dass jede Kante aus E mindestens einen Knoten von U enthält.

Beweis: Aus Korollar 3.2.13 bzw. Satz 3.4.5 und Bemerkung 3.3.1 folgt

$$\max\{\mathbf{1}^T x : S_G x \leq \mathbf{1} \wedge x \geq 0 \wedge x \in \mathbb{Z}^m\} = \max\{\mathbf{1}^T x : S_G x \leq \mathbf{1} \wedge x \geq 0\}$$

sowie

$$\min\{\mathbf{1}^T y : S_G^T y \geq \mathbf{1} \wedge y \geq 0 \wedge y \in \mathbb{Z}^n\} = \min\{\mathbf{1}^T y : S_G^T y \geq \mathbf{1} \wedge y \geq 0\}.$$

Nach dem Dualitätssatz gilt ferner

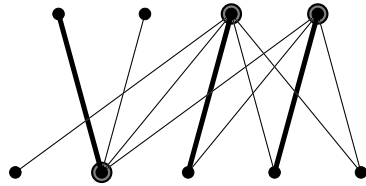
$$\max\{\mathbf{1}^T x : S_G x \leq \mathbf{1} \wedge x \geq 0\} = \min\{\mathbf{1}^T y : S_G^T y \geq \mathbf{1} \wedge y \geq 0\},$$

insgesamt also

$$\max\{\mathbf{1}^T x : S_G x \leq \mathbf{1} \wedge x \geq 0 \wedge x \in \mathbb{Z}^m\} = \min\{\mathbf{1}^T y : S_G^T y \geq \mathbf{1} \wedge y \geq 0 \wedge y \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Da jeder Optimalpunkt y^* des Minimierungsproblems auch $y^* \leq \mathbf{1}$ erfüllt, folgt die Behauptung. \square

3.4.11 Beispiel. Der in Abbildung 3.7 angegebene Graph besitzt kein Matching der Kardinalität 4; das angegebene Matching ist also kardinalitätsaximal.



3.7 Abbildung. Kardinalitätsaximales Matching und Kantenüberdeckung durch eine minimale Knotenmenge.

Diese Tatsache kann man mit Hilfe von Satz 3.4.10 dadurch beweisen, dass man eine minimale Knotenmenge U angibt, die alle Kanten überdeckt. Die in Abbildung 3.7 hervorgehobene Knotenmenge hat diese Eigenschaft.

3.4.12 Definition. Sei $A = (\alpha_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix A heißt **doppeltstochastisch**, wenn gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{i,j} &\geq 0 && (i,j \in [n]) \\ \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} &= 1 && (j \in [n]) \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} &= 1 && (i \in [n]). \end{aligned}$$

3.4.13 Korollar. (Satz von Birkhoff und von Neumann)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Matrix A ist genau dann doppeltstochastisch, wenn A Konvexkombination von Permutationsmatrizen ist.

Beweis: Seien $G = (V,E)$ der vollständige bipartite Graph $K_{n,n}$, $V_1 := \{v_1, \dots, v_n\}$, $V_2 := \{w_1, \dots, w_n\}$, $V = V_1 \cup V_2$, $E = \{e_1, \dots, e_{n^2}\}$, und die Nummerierung der Kanten sei so gewählt, dass gilt

$$e_{n(i-1)+j} = \{v_i, w_j\} \quad (i,j = 1, \dots, n).$$

Ferner sei

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{n^2} : S_G x = \mathbb{1} \wedge x \geq 0\}.$$

Nach Satz 3.4.5 und Bemerkung 3.3.1 ist P ganzzahlig. Die Ecken von P sind genau die Inzidenzvektoren der perfekten Matchings in G . Wir fassen nun eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als Vektor des \mathbb{R}^{n^2} auf und umgekehrt, indem einfach die Spalten der Matrix untereinander geschrieben werden, bzw. der k -te Block von n Komponenten des Vektors zur k -ten Spalte der zugehörigen Matrix wird. Dann entsprechen den Inzidenzvektoren eines perfekten Matchings in $K_{n,n}$ genau die Permutationsmatrizen, und eine doppeltstochastische Matrix entspricht genau einem Punkt von P . \square

4 Schnittebenenverfahren

4.1 Rundungsschnitte

4.1.1 Bemerkung. Seien $q \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ und $\kappa \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbb{Z}^n \cap H_{(q,\kappa)}^{\leq} = \mathbb{Z}^n \cap H_{(q, \lfloor \kappa \rfloor)}^{\leq}.$$

Beweis: Da natürlich $H_{(q, \lfloor \kappa \rfloor)}^{\leq} \subset H_{(q,\kappa)}^{\leq}$ gilt, ist nur die Inklusion ‘ \supset ’ zu beweisen. Ist $x \in \mathbb{Z}^n \cap H_{(q,\kappa)}^{\leq}$, so gilt aber

$$\mathbb{Z} \ni q^T x \leq \kappa \quad \Rightarrow \quad q^T x \leq \lfloor \kappa \rfloor,$$

und damit die Behauptung. □

4.1.2 Beispiel. Gegeben sei die ILP-Aufgabe

$$\begin{array}{rcll} \max & \xi_2 & & \\ \xi_1 & + & \xi_2 & \leq & 3 \\ -2\xi_1 & + & \xi_2 & \leq & -1 \\ \xi_1 & & & \leq & 2 \\ & & \xi_2 & \geq & 0 \\ \xi_1, & \xi_2 & \in & \mathbb{Z}. & \end{array}$$

Das Optimum der zugehörigen LP-Relaxation ist der Punkt

$$x^* := \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right)^T.$$

Die Zielfunktionsungleichung im Optimum ist somit

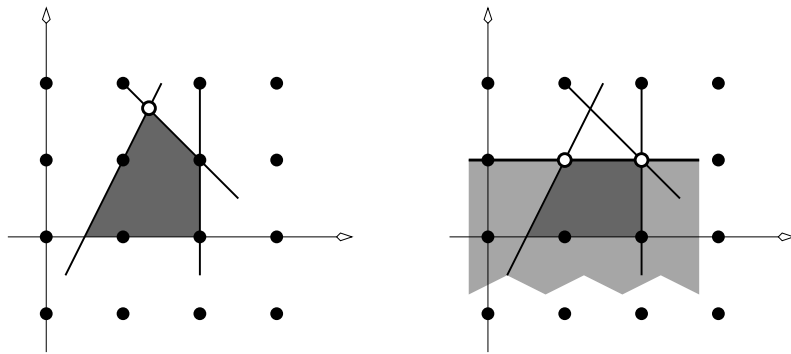
$$\xi_2 = c^T x \leq c^T x^* = \frac{5}{3},$$

d.h. für alle Lösungen der ILP-Aufgabe gilt

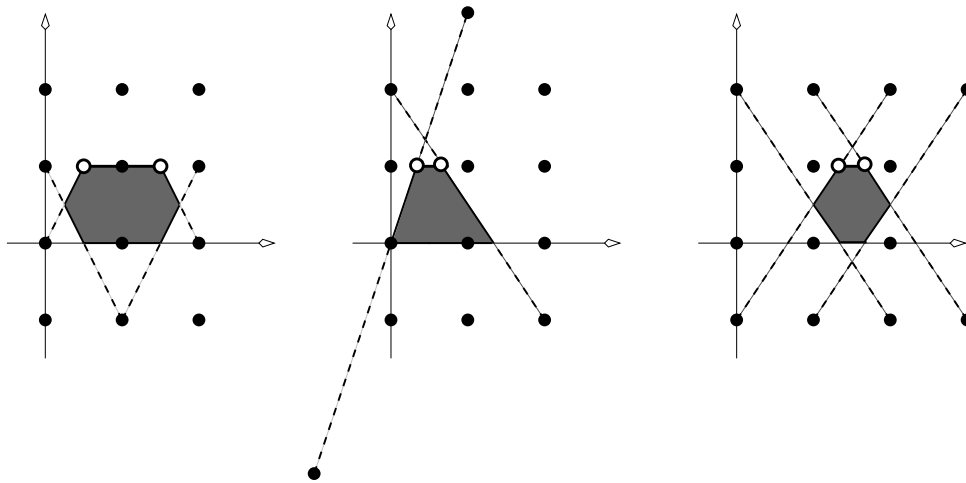
$$\xi_2 \leq \left\lfloor \frac{5}{3} \right\rfloor = 1.$$

Durch die Hinzunahme des einen Zielfunktionsschnittes erhalten wir einen zulässigen Bereich, dessen (LP-) optimale Ecken ganzzahlig und damit auch Lösungen der ILP-Aufgabe sind.

Wie die Beispiele aus Abbildung 4.2 zeigen, hat man aber meistens nicht soviel Glück. Die LP-Relaxationen der drei ILP-Aufgaben (zur selben Zielfunktion) von Abbildung 4.2 haben jeweils einen ganzzahligen maximalen Zielfunktionswert, nämlich in allen drei Fällen 1.



4.1 Abbildung. Links: Zulässiger Bereich der gegebenen ILP-Aufgabe. Rechts: der durch Rundung der rechten Seite der Zielfunktionsungleichung im Optimum entstehende Schnitt und der reduzierte zulässige Bereich.



4.2 Abbildung. Zulässige Bereiche verschiedener ILP-Aufgaben zur Zielfunktion $x \mapsto \xi_2$. (Einige Restriktionsgeraden sind (gestrichelt) bis zu einem nächsten Gitterpunkt über die Ecken der zulässigen Bereiche hinaus gezeichnet, damit deutlich wird, dass die Polytope jeweils eine ganzzahlige \mathcal{H} -Darstellung besitzen.) Die optimalen Ecken der LP-Relaxation sind hervorgehoben.

Ein Schnitt bezüglich des entsprechenden Stützhalbraums führt somit zu keiner Verkleinerung des jeweiligen Polyeders. Andererseits ist keine (LP-) optimale Ecke ganzzahlig. In der Abbildung links existiert in der durch $\xi_2 = 1$ gegebenen Zielfunktionshyperebene ein ganzzahliger Punkt, d.h., die zugehörige ILP-Aufgabe hat ebenfalls Optimalwert 1. In der mittleren Abbildung ist das ILP-Optimum dagegen 0; rechts liegt sogar ILP-Unzulässigkeit vor.

4.1.3 Bezeichnung. Jede Ungleichung der Form

$$y^T Ax \leq \lfloor y^T b \rfloor$$

mit

$$y \in \mathbb{R}^m \quad \wedge \quad y \geq 0 \quad \wedge \quad A^T y \in \mathbb{Z}^n$$

heißt (von y erzeugt) **Rundungsschnitt** (oder **Chvátal-Gomory Schnitt**¹) oder kurz **R-Schnitt**. Der Halbraum

$$H_{(A^T y, \lfloor b^T y \rfloor)}^{\leq} = \{x : y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor\}$$

heißt (zum R-Schnitt gehöriger) **Schnitthalbraum**, sein Rand $H_{(A^T y, \lfloor b^T y \rfloor)}$ ist die (zum R-Schnitt gehörige) **Schnitthyperebene**. Gilt zusätzlich $b^T y \notin \mathbb{Z}$, so heißt der Rundungsschnitt **eigentlich**².

4.1.4 Bemerkung. Seien $q \in \mathbb{Z}^n$, $\kappa \in \mathbb{R}$ mit $P \subset H_{(q, \kappa)}^{\leq}$ und $y \in [0, \infty[^m$ mit $q = A^T y$. Ferner seien $x^* \in P$ mit $q^T x^* = \max_{x \in P} q^T x$ und $y^* \in [0, \infty[^m$ mit $A^T y^* = q$ und $(y^*)^T (b - Ax^*) = 0$. Dann gilt

$$\lfloor b^T y^* \rfloor \leq \lfloor \kappa \rfloor \quad \wedge \quad \lfloor b^T y^* \rfloor \leq \lfloor b^T y \rfloor.$$

Beweis: Es gilt

$$(y^*)^T b = (y^*)^T A x^* = q^T x^* \leq \kappa \quad \wedge \quad q^T x^* = y^T A x^* \leq y^T b,$$

und hieraus folgt die Behauptung □

4.1.5 Bemerkung. Seien $p \in \mathbb{N}$, $J \subset [m]$, $q_1, \dots, q_p \in \text{pos}(\{a_j : j \in J\}) \cap \mathbb{Z}^n$, $y_i \in [0, \infty[^{|J|}$ mit $q_i = A_J^T y_i$ für $i \in J$ sowie

$$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{N}_0 \quad \wedge \quad q := \sum_{i=1}^p \lambda_i q_i \quad \wedge \quad y := \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i.$$

Dann gilt

$$\bigcap_{i=1}^p H_{(q_i, \lfloor b_J^T y_i \rfloor)}^{\leq} \subset H_{(q, \lfloor b_J^T y \rfloor)}^{\leq}.$$

Beweis: Sei $x \in \bigcap_{i=1}^p H_{(q_i, \lfloor b_J^T y_i \rfloor)}^{\leq}$. Dann gilt $q_i^T x \leq \lfloor b_J^T y_i \rfloor$, und damit

$$q^T x = \sum_{i=1}^p \lambda_i q_i^T x \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \lfloor b_J^T y_i \rfloor \leq \left\lfloor \sum_{i=1}^p \lambda_i b_J^T y_i \right\rfloor = \lfloor b_J^T y \rfloor.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

¹ Wir benutzen hier den Begriff Rundungsschnitt, um eine Verwechslung mit dem später eingeführten spezielleren Gomory Schnitt auszuschließen.

² Der Begriff ‘eigentlich’ bezieht sich auf den Schnitthalbraum, nicht auf die Geometrie des Polyeders P . Tatsächlich braucht durch einen eigentlichen R-Schnitt das Polyeder nicht verkleinert zu werden.

4.2 Hilbertbasen

4.2.1 Definition. Seien C ein ganzzahliger polyedrischer Kegel, $p \in \mathbb{N}$ und $\{q_1, \dots, q_p\} \subset C \cap \mathbb{Z}^n$. Die Menge $\{q_1, \dots, q_p\}$ heißt **Hilbertbasis**³ des Kegels C , wenn es zu jedem Punkt $q \in C \cap \mathbb{Z}^n$ Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ gibt mit

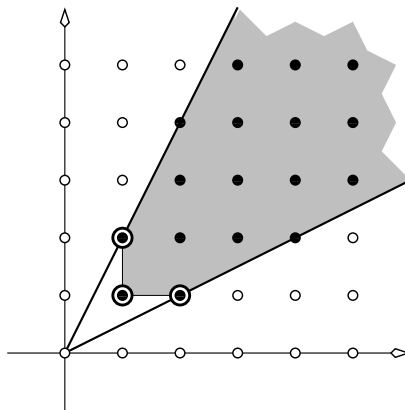
$$\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{N}_0 \quad \wedge \quad q = \sum_{i=1}^p \lambda_i q_i.$$

Ist zwar $\{q_1, \dots, q_p\}$, aber keine ihrer echten Teilmengen eine Hilbertbasis von C , so heißt $\{q_1, \dots, q_p\}$ **minimale Hilbertbasis**.

4.2.2 Beispiel. Seien

$$s_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad s_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und $C := \text{pos}(\{s_1, s_2\})$.



4.3 Abbildung. Kegel C und seine minimale Hilbertbasis; $\text{conv}(C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}))$ ist grau unterlegt.

Es gilt

$$C \cap \mathbb{Z}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : i \in \mathbb{N}_0 \wedge j = 0, \dots, i \right\} \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : i \in \mathbb{N}_0 \wedge j = 0, \dots, i \right\}.$$

Mittels vollständiger Induktion über i zeigt man, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Hilbertbasis von C bilden. Der Induktionsschritt für die Gitterpunkte auf den Geraden parallel zur ξ_1 -Achse ist

³ Diese Definition ist gängige Praxis. Eigentlich wäre hier aber der Begriff ‘Hilbert-Erzeugendensystem’ besser.

$$\begin{aligned} \binom{i}{i} + j \binom{1}{0} + \binom{1}{1} &= \binom{i+1}{i+1} + j \binom{1}{0} & (j = 0, \dots, i) \\ \binom{i}{i} + i \binom{1}{0} + \binom{2}{1} &= \binom{i+1}{i+1} + (i+1) \binom{1}{0}. \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Gitterpunkte auf den Geraden parallel zur ξ_2 -Achse. (Einen getrennten Beweis kann man sich aber wegen der Symmetrie von C bezüglich der durch $\xi_1 = \xi_2$ gegebenen Geraden sparen.)

Da sich keiner der Vektoren $s_1, s_2, \mathbb{1}$ als positive ganzzahlige Linearkombination anderer Gitterpunkte von C darstellen lässt, sind alle drei in jeder Hilbertbasis von C enthalten, d.h. $\{s_1, s_2, \mathbb{1}\}$ ist minimale Hilbertbasis von C .

4.2.3 Lemma. Sei $C := \text{pos}(\{s_1, \dots, s_k\})$ ein ganzzahliger polyedrischer Kegel. Dann enthält jede Hilbertbasis von C alle Ecken von $\text{conv}(C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}))$.

Beweis: Seien v eine Ecke von $\text{conv}(C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}))$, $l \in \mathbb{N}$, $\{q_1, \dots, q_l\}$ Teilmenge einer Hilbertbasis von C und $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^l \lambda_i q_i = v$. Ferner seien für $i = 1, \dots, l$

$$v_i := l\lambda_i q_i \quad \wedge \quad \mu_i := \frac{1}{l}.$$

Dann gilt

$$v_1, \dots, v_l \in C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \quad \wedge \quad \mu_1, \dots, \mu_l > 0 \quad \wedge \quad \sum_{i=1}^l \mu_i = 1$$

und

$$v = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l l\lambda_i q_i = \sum_{i=1}^l \mu_i v_i.$$

Somit ist v Konvexkombination von v_1, \dots, v_l . Da v Ecke von $\text{conv}(C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}))$ ist, folgt $l = 1$. Aus

$$v = \lambda_1 v_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} (2\lambda_1 - 1) v_1 \quad \wedge \quad \mathbb{N}_0 v_1 \subset C \cap \mathbb{Z}^n$$

ergibt sich ferner $\lambda_1 = 1$. Insgesamt folgt also

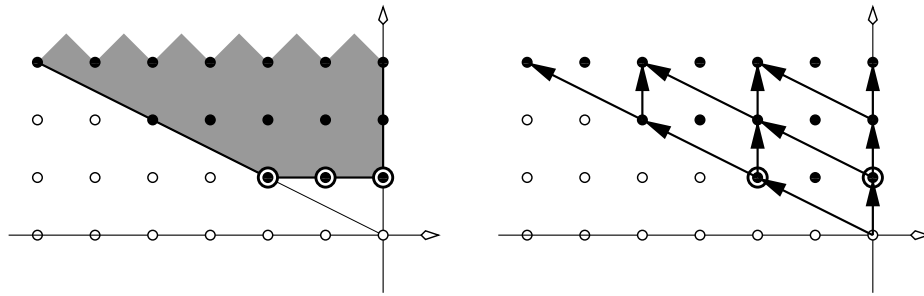
$$v \in \{q_1, \dots, q_l\}$$

und damit die Behauptung. □

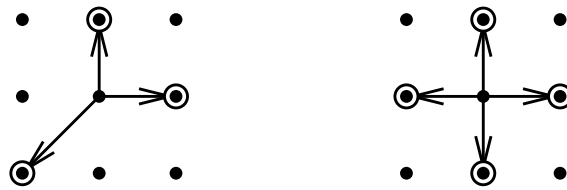
4.2.4 Beispiel. Seien

$$s_1 := \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad s_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und $C := \text{pos}(\{s_1, s_2\})$. Die Ecken von $\text{conv}(C \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}))$ sind die beiden Vektoren s_1 und s_2 . Sie bilden aber keine Hilbertbasis, da sie keinen Vektor ganzzahlig erzeugen, dessen erste Komponente ungerade ist. Zu jeder Hilbertbasis gehört noch der Vektor $(-1, 1)^T$, obwohl dieser Konvexkombination von s_1 und s_2 ist.



4.4 Abbildung. Links: $C, \text{conv}(C \cap (\mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}))$ (grau), minimale Hilbertbasis. Rechts: Kein Vektor mit ungerader erster Komponente kann durch (nicht negative) ganzzahlige Linearkombination aus s_1, s_2 erzeugt werden.



4.5 Abbildung. $\{u_1, u_2, -u_1 - u_2\}$ und $\{\pm u_1, \pm u_2\}$ sind minimale Hilbertbasen des Kegels \mathbb{Z}^2 verschiedener Kardinalitäten.

4.2.5 Beispiel. Es ist klar, dass minimale Hilbertbasen eines Kegels unterschiedlich groß sein können, denn gleiches gilt für minimale Erzeugendensysteme reeller Kegel. So kann \mathbb{Z}^2 etwa durch die in Abbildung 4.5 angegebenen drei oder vier Vektoren erzeugt werden. Überraschender ist aber vielleicht, dass bereits der einfache Kegel $C := \mathbb{R}$ minimale Hilbertbasen beliebig großer Kardinalität besitzt.

Seien π_1, \dots, π_k verschiedene Primzahlen und

$$q_0 := - \prod_{j=1}^k \pi_j \quad \wedge \quad q_i := \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k \pi_j \quad (i = 1, \dots, k).$$

Dann ist $\text{ggT}(q_1, \dots, q_k) = 1$, und aus Lemma 2.2.2 folgt

$$\sum_{i=1}^k \mathbb{Z}q_i = \mathbb{Z}.$$

Seien nun $l \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_l < 0$, $\lambda_{l+1}, \dots, \lambda_k > 0$ und $\lambda \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i q_i = 1 \quad \wedge \quad \lambda \pi_1 \geq |\lambda_1| \wedge \dots \wedge \lambda \pi_l \geq |\lambda_l|$$

gilt. Es folgt

$$\sum_{i=1}^l (\lambda_i + \lambda \pi_i) q_i + \sum_{i=l+1}^k \lambda_i q_i = 1 - \lambda q_0$$

also

$$1 = \lambda l q_0 + \sum_{i=1}^l (\lambda_i + \lambda \pi_i) q_i + \sum_{i=l+1}^k \lambda_i q_i.$$

Da $q_0 < 0$ ist (oder analog auch -1 als nicht negative ganzzahlige Linearkombination von q_0, q_1, \dots, q_k darstellbar ist), folgt

$$\sum_{i=0}^k \mathbb{N}_0 q_i = \mathbb{Z}.$$

Also bilden q_0, q_1, \dots, q_k eine Hilbertbasis von C . Andererseits besitzt jede echte Teilmenge von $\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$ einen nicht trivialen Teiler; $\{q_0, q_1, \dots, q_k\}$ ist nach Lemma 2.2.2 also eine minimale Hilbertbasis.

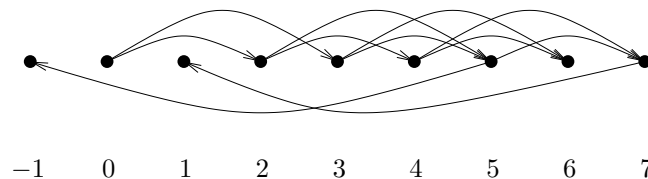
Wendet man diese Konstruktion etwa für $\pi_1 := 2$ und $\pi_2 := 3$ an, so ergibt sich

$$q_0 := -6 \wedge q_1 := 3 \wedge q_2 := 2,$$

und es gilt mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ und $\lambda = 1$ (bzw. $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda = 1$)

$$1 = q_0 + q_1 + 2q_2 \quad \wedge \quad -1 = q_0 + q_1 + q_2;$$

vgl. Abbildung 4.6.



4.6 Abbildung. Nicht negative ganzzahlige Erzeugung von \mathbb{Z} aus q_0, q_1, q_2 .

4.2.6 Satz. Sei C ein ganzzahliger polyedrischer Kegel. Dann besitzt C eine Hilbertbasis. Ist C spitz, so existiert eine eindeutige minimale Hilbertbasis.

Beweis: Seien $k \in \mathbb{N}$ und $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Z}^n$ mit $C = \text{pos}(\{s_1, \dots, s_k\})$. Ferner sei

$$Q := \mathbb{Z}^n \cap \sum_{i=1}^k [0, 1] s_i;$$

die Elemente von Q werden mit q_1, \dots, q_p bezeichnet, d.h. $Q = \{q_1, \dots, q_p\}$. Wir zeigen, dass Q eine Hilbertbasis von C ist.

Seien $q \in C \cap \mathbb{Z}^n$ und $\mu_1, \dots, \mu_k \in [0, \infty[$ mit

$$q = \sum_{i=1}^k \mu_i s_i.$$

Natürlich gilt auch

$$q = \sum_{i=1}^k \lfloor \mu_i \rfloor s_i + \sum_{i=1}^k (\mu_i - \lfloor \mu_i \rfloor) s_i,$$

also

$$\sum_{i=1}^k \langle \mu_i \rangle s_i = q - \sum_{i=1}^k \lfloor \mu_i \rfloor s_i \in \mathbb{Z}^n \cap \sum_{i=1}^k [0,1] s_i \subset Q.$$

Da auch die Vektoren s_1, \dots, s_k in Q liegen, ist q eine nicht negative, ganzzahlige Linearkombination von Elementen von Q ; es folgt die erste Behauptung.

Seien nun C spitz und $z_0 \in \text{int}(N_C(0))$. Dann gilt $z_0^T x < 0$ für jedes $x \in C \setminus \{0\}$. Wir setzen

$$R := \left\{ z \in C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) : x_1, x_2 \in C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\}) \Rightarrow z \neq x_1 + x_2 \right\}.$$

Da sich kein Punkt von R auf nicht triviale Weise als Summe von zwei ganzzahligen Punkten des Kegels C darstellen lässt, ist R in jeder Hilbertbasis von C enthalten. Insbesondere gilt also $R \subset Q$, d.h. R ist eine endliche Menge. Es reicht daher zu zeigen, dass R selbst eine Hilbertbasis von C ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass sich nicht jeder Vektor aus $C \cap \mathbb{Z}^n$ als nicht negative ganzzahlige Linearkombination von Vektoren aus R darstellen lässt. Sei $q^* \in C \cap \mathbb{Z}^n$ ein solcher Punkt mit maximalem Skalarprodukt $z_0^T q^*$. Da $q^* \notin R$ ist, gibt es von 0 verschiedene Vektoren $x_1, x_2 \in C \cap \mathbb{Z}^n$ mit $q^* = x_1 + x_2$. Es folgt wegen $z_0^T x_1, z_0^T x_2 < 0$ und $z_0^T q^* = z_0^T x_1 + z_0^T x_2$

$$z_0^T x_1 > z_0^T q^* \quad \wedge \quad z_0^T x_2 > z_0^T q^*.$$

Also sind nach Konstruktion x_1 und x_2 nicht negative ganzzahlige Linearkombinationen von Elementen aus R , und damit auch q^* , im Widerspruch zur Annahme. R ist also eine Hilbertbasis von C , und es folgt die Behauptung. \square

4.2.7 Bezeichnung. Seien $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Z}^n$ und $C := \text{pos}(\{s_1, \dots, s_k\})$. Dann heißt $\sum_{i=1}^k [0,1] s_i$ **Hilbertzonotop** der gegebenen Erzeugenden s_1, \dots, s_k des Kegels C . Sind s_1, \dots, s_k linear unabhängig, so heißt $\sum_{i=1}^k [0,1] s_i$ **Hilbertparallelotop** der gegebenen Erzeugenden s_1, \dots, s_k von C .

4.2.8 Beispiel. Seien P das durch

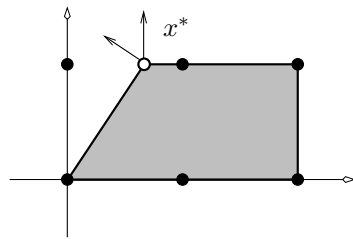
$$\begin{aligned} -3\xi_1 + 2\xi_2 &\leq 0 \\ \xi_1 &\leq 2 \\ \xi_2 &\leq 1 \\ -\xi_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

gegebene Polytop und $x^* = (2/3, 1)^T$. x^* ist eine Ecke von P , $B := \{1, 3\}$ die (in diesem Beispiel eindeutig bestimmte) Basis, und mit

$$s_1 := q_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad s_2 := q_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$N_P(x^*) = \text{pos}(\{s_1, s_2\}).$$



4.7 Abbildung. Das Polytop P .

Das Hilbertparallelotop $\sum_{i=1}^2 [0,1]s_i$ enthält genau die sechs Gitterpunkte

$$0, q_1, q_2, q_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix};$$

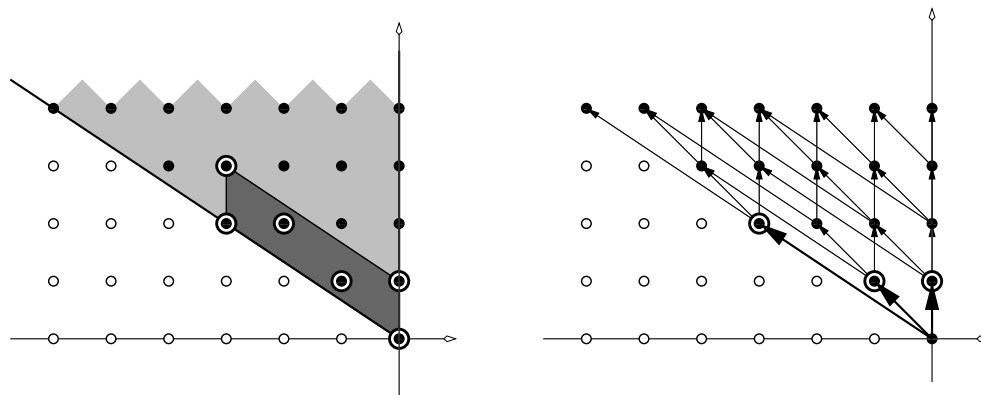
vgl. Abbildung 4.8 (links). Natürlich ist 0 redundant. Es gilt aber auch

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2q_3 \quad \wedge \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3q_3 = q_1 + q_2.$$

Somit werden alle ganzzahligen Vektoren bereits von den drei ‘irreduziblen’ Vektoren

$$q_1, q_2, q_3$$

erzeugt; vgl. Abbildung 4.8 (rechts). Diese bilden die eindeutig bestimmte minimale Hilbertbasis des Kegels $N_P(x^*)$.



4.8 Abbildung. Links: Der Kegel $N_P(x^*)$; das Hilbert-Parallelotop $\sum_{i=1}^2 [0,1]s_i$ sowie die darin enthaltenen Gitterpunkte. Rechts: Die minimale Hilbertbasis $\{q_1, q_2, q_3\}$ sowie Darstellungen der von 0 verschiedenen Vektoren als nicht negative ganzzahlige Linearkombination derselben.

Um die zu q_1, q_2, q_3 gehörigen Rundungsschnitte in der Form von Bezeichnung 4.1.3 zu bestimmen, sind diese Vektoren in der Basis $\{s_1, s_2\}$ darzustellen, d.h. es sind die zugehörigen Vektoren y_1, y_2, y_3 gemäß

$$y_i := (A_B^{-1})^T q_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

zu berechnen.⁴ Es gilt

$$A_B^T = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad (A_B^{-1})^T = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad y_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

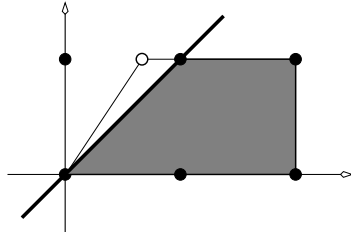
sind. Wir erhalten also die R-Schnitte

$$y_i^T A_B x \leq \lfloor y_i^T b_B \rfloor \quad (i = 1, 2, 3)$$

als

$$-3\xi_1 + 2\xi_2 \leq 0 \quad \wedge \quad \xi_2 \leq 1 \quad \wedge \quad -\xi_1 + \xi_2 \leq \left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor = 0.$$

Die ersten beiden Schnitte entsprechen der ersten und dritten Restriktion; der dritte Schnitt entsteht aus ihrer Summe. Natürlich (und ohnehin erwartet, da ja die entsprechenden Restriktionsgeraden ganzzahlige Punkte enthalten) ist nur die letzte Ungleichung ein eigentlicher Rundungsschnitt.



4.9 Abbildung. Der zulässige Bereich nach Durchführung des eigentlichen Rundungsschnitts $-\xi_1 + \xi_2 \leq 0$.

4.2.9 Bemerkung. Seien x^* eine Ecke von P , $B \subset [m]$ eine Basis, $N := [m] \setminus B$, $y \geq 0$ mit $A^T y \in \mathbb{Z}^n$ und $q := A^T y$. Gilt $y_N = 0$, so ist $q^T x \leq \lfloor q^T x^* \rfloor$ der von y erzeugte R-Schnitt.

Beweis: Es gilt

$$q^T x = y_B^T A_B x \leq \lfloor y_B^T b_B \rfloor = \lfloor y_B^T A_B (A_B)^{-1} b_B \rfloor = \lfloor q^T x^* \rfloor.$$

□

4.3 Die R-Ableitung

4.3.1 Bezeichnung. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P := \{x : Ax \leq b\}$, $Y := \{y \in \mathbb{R}^m : y \geq 0 \wedge A^T y \in \mathbb{Z}^n\}$ und

⁴ Ergänzt man diese Vektoren durch Einfügen der zweiten und vierten Komponente 0 zu Vektoren des \mathbb{R}^4 , so erhält man gerade die zugehörigen dualen Basisvektoren.

$$P' := \bigcap_{y \in Y} H_{(A^T y, \lfloor b^T y \rfloor)}^{\leq}$$

Dann heißt P' die **R-Ableitung** (oder **Chvátal-Gomory-Ableitung**) von P .

4.3.2 Satz. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P := \{x : Ax \leq b\}$ und P' die R-Ableitung von P . Dann ist P' ein Polyeder.

Beweis: Für $P = \emptyset$ oder $P = \mathbb{R}^n$ gilt die Behauptung. Sei also $P \not\subseteq \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\{N_1, \dots, N_k\}$ eine (minimale) Menge von Kegeln der äußeren Normalen zu Randpunkten von P , deren Vereinigung jeden äußeren Normalenvektor an P enthält. Ferner sei für jedes $j = 1, \dots, k$ und jeden Vektor $q \in \mathbb{Z}^n \cap N_j$ der Vektor y_q ein Optimalpunkt der dualen LP-Aufgabe $\min\{b^T y : y \geq 0 \wedge A^T y = q\}$. Dann gilt nach Bemerkung 4.1.4

$$P' = \bigcap_{j=1}^k \bigcap_{q \in \mathbb{Z}^n \cap N_j} H_{(A^T y_q, \lfloor b^T y_q \rfloor)}^{\leq}$$

d.h. für jeden ganzzahligen Punkt des Kegels N_j reicht ein (von einem dualen Optimalpunkt stammender) R-Schnitt. Gemäß Satz 4.2.6 sei für $j = 1, \dots, k$ nun Q_j eine Hilbertbasis von N_j . Dann gilt nach Bemerkung 4.1.5 für $j = 1, \dots, k$

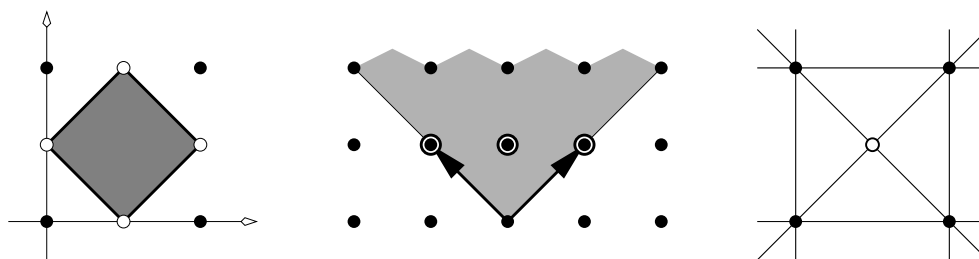
$$\bigcap_{q \in \mathbb{Z}^n \cap N_j} H_{(A^T y_q, \lfloor b^T y_q \rfloor)}^{\leq} = \bigcap_{q \in Q_j} H_{(A^T y_q, \lfloor b^T y_q \rfloor)}^{\leq}$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

4.3.3 Beispiel. Seien P das durch

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 2\xi_2 &\leq 3 \\ 2\xi_1 - 2\xi_2 &\leq 1 \\ -2\xi_1 + 2\xi_2 &\leq 1 \\ -2\xi_1 - 2\xi_2 &\leq -1 \end{aligned}$$

gegebene Polytop. Es reicht, die Kegel



4.10 Abbildung. Links: Das Polytop P . Mitte: Der Kegel N_1 und seine minimale Hilbertbasis. Rechts: Die zu den minimalen Hilbertbasen gehörigen Schnittgeraden sowie $P' = \{(1/2, 1/2)^T\}$.

$$\begin{aligned} N_1 &:= \text{pos} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right), & N_2 &:= \text{pos} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right) \\ N_3 &:= \text{pos} \left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right), & N_4 &:= \text{pos} \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

zu betrachten. Ihre minimalen Hilbertbasen bestehen jeweils aus drei Vektoren; die Normalenvektoren q der entsprechenden Schnitte sind alle acht Vektoren der Form

$$\pm u_1, \pm u_2, u_1 \pm u_2, -u_1 \pm u_2.$$

Nach Bemerkung 4.2.9 erhält man die zugehörigen Schnitte

$$\begin{array}{rcll} \xi_1 & \leq & [1] & = 1 \\ -\xi_1 & \leq & [0] & = 0 \\ & \xi_2 & \leq & [1] = 1 \\ & -\xi_2 & \leq & [0] = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 & \leq & [\frac{3}{2}] & = 1 \\ \xi_1 - \xi_2 & \leq & [\frac{1}{2}] & = 0 \\ -\xi_1 + \xi_2 & \leq & [\frac{1}{2}] & = 0 \\ -\xi_1 - \xi_2 & \leq & [-\frac{1}{2}] & = -1 \end{array} .$$

Wie zu erwarten war, führen die ersten vier Schnitte zu keiner Reduktion von P , da ihre zugehörigen Begrenzungsgraden Gitterpunkte enthalten. Die letzten vier sind eigentliche R -Schnitte; sie lassen insgesamt nur noch den Punkt $(1/2, 1/2)^T$ zu, so dass gilt

$$P' = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Andererseits ist $P_I = \emptyset$, d.h. $P' \neq P_I$.

4.3.4 Beispiel. Seien $\alpha \in \mathbb{N}$ und

$$C := \text{pos}(\alpha[-1,1]^{n-1} \times \{1\}).$$

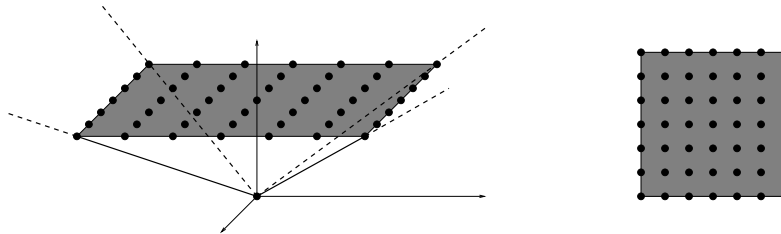
Seien $x, x_1, x_2 \in C \cap (\mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$ mit $x = x_1 + x_2$. Dann gilt $u_n^T x_1, u_n^T x_2 \geq 1$ und damit $u_n^T x \geq 2$. Somit liegt jeder der

$$(2\alpha + 1)^{n-1}$$

Vektoren aus

$$(\alpha[-1,1]^{n-1} \times \{1\}) \cap \mathbb{Z}^n$$

in der minimalen Hilbertbasis des Kegels C .



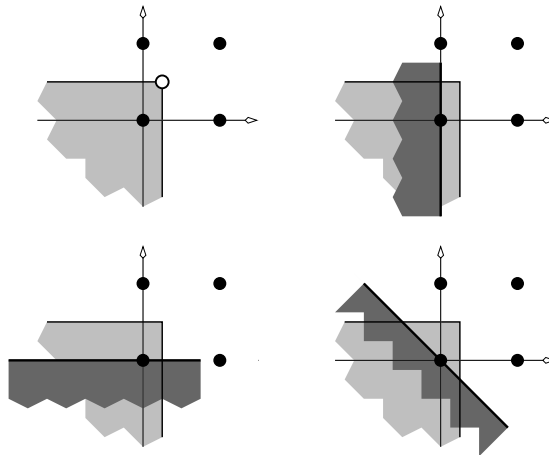
4.11 Abbildung. Die Kardinalität minimaler Hilbertbasen. Links: der Kegel C für $n = 2$ und $\alpha = 3$; rechts: die Menge $(\alpha[-1,1]^{n-1}) \cap \mathbb{Z}^n$ für diese Parameterwahl.

4.3.5 Beispiel. Sei P das durch

$$\begin{aligned} 4\xi_1 &\leq 1 \\ 2\xi_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

gegebene Polyeder. Seine einzige Ecke $x^* := (1/4, 1/2)^T$ ist nicht ganzzahlig. Die minimale Hilbertbasis des zugehörigen Kegels der äußeren Normalen besteht aus u_1 und u_2 . Die zu diesen Vektoren gehörigen R-Schnitte sind

$$\xi_1 \leq 0 \quad \wedge \quad \xi_2 \leq 0.$$



4.12 Abbildung. Oben: das Polyeder P (links), der Schnitt $\xi_1 \leq 0$ (rechts). Unten: die Schnitte $\xi_2 \leq 0$ und $\xi_1 + \xi_2 \leq 0$.

Der Vektor $q := (1,1)^T$ hingegen liefert den Schnitt

$$\xi_1 + \xi_2 \leq \left\lfloor \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.$$

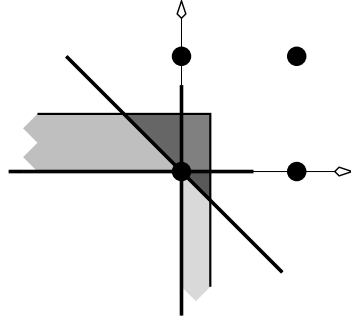
Der Vektor q gehört nicht zur minimalen Hilbertbasis; der von ihm induzierte Schnitt wird aber nicht von einem einzelnen der beiden Schnitte zu u_1 bzw. u_2 dominiert. Abbildung 4.13 zeigt die beiden Dreiecke, die durch $\xi_1 + \xi_2 \leq 0$ abgeschnitten werden, nicht aber durch $\xi_1 \leq 0$ bzw. $\xi_2 \leq 0$. Im Sinne der Inklusion dominiert tatsächlich keiner der drei Schnitte einen der beiden anderen.

4.4 Gomory-Schnitte

4.4.1 Satz. Seien x^* eine Basislösung der LP-Aufgabe $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$, B eine zugehörige Basis, $N := [m] \setminus B$ und $v \in \mathbb{Z}^n$. Ferner seien $y^* \in \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$y^* \in \mathbb{R}^m \quad \wedge \quad y_B^* := \left\langle (A_B^{-1})^T v \right\rangle \quad \wedge \quad y_N^* := 0 \quad \wedge \quad q^* := A^T y^*.$$

Dann gilt



4.13 Abbildung. Keiner der Schnitte $\xi_1 \leq 0$, $\xi_2 \leq 0$ oder $\xi_1 + \xi_2 \leq 0$ dominiert einen der anderen.

$$q^* = v - A_B^T \left[(A_B^{-1})^T v \right] \in N_P(B) \cap \mathbb{Z}^n,$$

die Ungleichung

$$(q^*)^T x \leq \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor$$

ist ein Rundungsschnitt, und

$$\langle (q^*)^T x^* \rangle = \langle v^T x^* \rangle.$$

Gilt $v^T x^* \notin \mathbb{Z}$, so ist der R-Schnitt eigentlich. Sei ferner

$$q \in N_P(B) \cap \mathbb{Z}^n \quad \wedge \quad (A_B^{-1})^T (q - v) \in \mathbb{Z}^n.$$

Dann gilt

$$H_{(q^*, \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor)}^{\leq} \cap (x^* + S_P(B)) \subset H_{(q, \lfloor q^T x^* \rfloor)}^{\leq} \cap (x^* + S_P(B)).$$

Beweis: Es gilt $y^* \geq 0$ sowie

$$(q^*)^T x = (y^*)^T A x \quad \wedge \quad (q^*)^T x^* = (q^*)^T A_B^{-1} b_B = (y_B^*)^T b_B = (y^*)^T b;$$

y^* erzeugt also den R-Schnitt $(q^*)^T x \leq \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor$.

Ferner ist $q^* = A^T y^* = A_B^T y_B^* \in N_P(B)$ sowie

$$q^* = A_B^T y_B^* = A_B^T \left((A_B^{-1})^T v - \lfloor (A_B^{-1})^T v \rfloor \right) = v - A_B^T \lfloor (A_B^{-1})^T v \rfloor \in \mathbb{Z}^n.$$

Da $\lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor b_B$ ganzzahlig ist, gilt weiter

$$\begin{aligned} \langle (q^*)^T x^* \rangle &= \left\langle \left(v - A_B^T \lfloor (A_B^{-1})^T v \rfloor \right)^T x^* \right\rangle = \left\langle v^T x^* - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B x^* \right\rangle \\ &= \left\langle v^T x^* - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor b_B \right\rangle = \langle v^T x^* \rangle. \end{aligned}$$

Der Schnitt erhält also den fraktionellen Anteil von $v^T x^*$ und ist somit insbesondere genau dann eigentlich, wenn $v^T x^* \notin \mathbb{Z}$ gilt.

Sei nun $q \in N_P(B) \cap \mathbb{Z}^n$, und es gelte

$$(A_B^{-1})^T q - (A_B^{-1})^T v \in \mathbb{Z}^n.$$

Ferner seien

$$y_B := (A_B^{-1})^T q \quad \wedge \quad w := q - v.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$(A_B^{-1})^T w = (A_B^{-1})^T q - (A_B^{-1})^T v \in \mathbb{Z}^n$$

sowie

$$w^T x^* = (q - v)^T x^* = (q^T A_B^{-1} - v^T A_B^{-1}) A_B x^* = (q^T A_B^{-1} - v^T A_B^{-1}) b_B \in \mathbb{Z},$$

insbesondere also

$$\lfloor v^T x^* \rfloor + w^T x^* = \lfloor q^T x^* \rfloor.$$

Da $q \in N_P(B)$ ist, gilt

$$0 \leq y_B = (A_B^{-1})^T q = (A_B^{-1})^T v + (A_B^{-1})^T w.$$

Somit folgt wegen $(A_B^{-1})^T w \in \mathbb{Z}^n$

$$y_B - (A_B^{-1})^T v = (A_B^{-1})^T w \geq \lceil -(A_B^{-1})^T v \rceil = -\lfloor (A_B^{-1})^T v \rfloor,$$

also

$$y_B \geq y_B^*.$$

Sei nun $x \in H_{(q^*, \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor)}^{\leq} \cap (x^* + S_P(B))$. Dann ist wegen $q^* = v - A_B^T \lfloor (A_B^{-1})^T v \rfloor$

$$v^T x - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B x = (q^*)^T x \leq \lfloor q^T x^* \rfloor = \lfloor v^T x^* - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B x^* \rfloor.$$

Da $A_B x^* = b_B \in \mathbb{Z}^n$ ist, folgt

$$\begin{aligned} v^T x &\leq \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B x + \lfloor v^T x^* - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B x^* \rfloor \\ &= \lfloor v^T x^* \rfloor - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B (x^* - x). \end{aligned}$$

Ferner gilt wegen $x \in x^* + S_P(B)$

$$A_B (x^* - x) \geq 0.$$

Fügen wir nun die hergeleiteten Gleichungen und Ungleichungen zusammen, so folgt

$$\begin{aligned} q^T x &= v^T x + w^T x \leq \lfloor v^T x^* \rfloor - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B (x^* - x) + w^T x \\ &= \lfloor v^T x^* \rfloor + w^T x^* - w^T (x^* - x) - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B (x^* - x) \\ &= \lfloor q^T x^* \rfloor - \left(w^T A_B^{-1} + \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor \right) A_B (x^* - x) \\ &= \lfloor q^T x^* \rfloor - \left(q^T A_B^{-1} - v^T A_B^{-1} + \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor \right) A_B (x^* - x) \\ &= \lfloor q^T x^* \rfloor - (y_B - y_B^*)^T A_B (x^* - x) \\ &\leq \lfloor q^T x^* \rfloor, \end{aligned}$$

also

$$x \in H_{(q, \lfloor q^T x^* \rfloor)}^{\leq}$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung. \square

4.4.2 Bemerkung. Mit den Bezeichnungen aus Satz 4.4.1 gilt

$$(A_B^{-1})^T (q - v) \in \mathbb{Z}^n \quad \Rightarrow \quad (q - v)^T A_B^{-1} b_B \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad (q - q^*)^T x^* \in \mathbb{Z}.$$

Beweis: Es gilt

$$(q - q^*)^T x^* = (q - q^*)^T A_B^{-1} b_B = \left(q^T A_B^{-1} - (y_B^*)^T \right) b_B = (q - v)^T A_B^{-1} b_B + \left[v^T A_B^{-1} \right] b_B,$$

und hieraus folgt die Behauptung. \square

4.4.3 Definition. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, x^* eine optimale Basislösung der LP-Aufgabe $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$, B eine zugehörige optimale Basis, $N := [m] \setminus B$ und $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $v^T x^* \notin \mathbb{Z}$. Ferner seien $y^* \in \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$y_B^* := \left\langle (A_B^{-1})^T v \right\rangle \quad \wedge \quad y_N := 0$$

und $q^* := A^T y^*$. Dann heißen

$$(q^*)^T x \leq \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor \quad \text{bzw.} \quad (y^*)^T Ax \leq \lfloor (y^*)^T b \rfloor$$

Gomory-Schnitt und q^* **Gomory-Schnittvektor** zu v . Sind $i \in [n]$ und $\xi_i^* \notin \mathbb{Z}$, so heißt der Gomory-Schnitt zum Vektor u_i auch **Gomory-Schnitt zur i -ten Komponente**. Ist $c^T x^* \notin \mathbb{Z}$, so heißt der Gomory-Schnitt zum Vektor c auch **Gomory-Schnitt zur Zielfunktion**.

4.4.4 Lemma. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, $P := \{x : Ax \leq b\}$, x^* eine optimale Basislösung der LP-Aufgabe $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$, B eine zugehörige optimale Basis, $N := [m] \setminus B$ und $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $v^T x^* \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt

(a) Der Gomory-Schnitt zu v hat die Form

$$v^T x \leq \lfloor v^T x^* \rfloor - \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B (x^* - x).$$

Ist v der i -te Standardbasisvektor, so gilt insbesondere

$$\xi_i - \lfloor u_i^T A_B^{-1} \rfloor A_B x \leq \lfloor \xi_i^* \rfloor - \lfloor u_i^T A_B^{-1} \rfloor b_B.$$

(b) Der Gomory-Schnittvektor q^* liegt im Hilbertparallelotop $\sum_{i \in B} [0, 1] a_i$ des Kegels $N_P(B)$; genauer gilt⁵ $q^* \in \sum_{i \in B} [0, 1] a_i$, und q^* ist der einzige solche Vektor mit $(A_B^{-1})^T (q - v) \in \mathbb{Z}^n$.

⁵ Man mag sich vielleicht wundern, dass die Erzeugenden a_i ($i \in B$) hierbei nicht auftreten, obwohl sie ja durchaus zur minimalen Hilbertbasis gehören können. Man bedenke aber, dass $a_i^T x^* = b_i \in \mathbb{Z}$ gilt, also mit a_i kein eigentlicher Schnitt erzeugt wird.

(c) Ist $v \in \sum_{i \in B} [0, 1] a_i$, so folgt $q^* = v$.

Beweis: (a) folgt direkt aus Satz 4.4.1.

(b) Wegen $y_B^* := \left\langle (A_B^{-1})^T v \right\rangle$ und $y_N := 0$ gilt $0 \leq y^* < \mathbf{1}$. Somit folgt mit $y^* := (\eta_1^*, \dots, \eta_m^*)^T$

$$q^* = A^T y^* = A_B^T y_B^* = \sum_{i \in B} \eta_i^* a_i \in \sum_{i \in B} [0, 1] a_i.$$

Sei q ein weiterer solcher Vektor. Dann gilt $0 \leq y_B := (A_B^{-1})^T q < \mathbf{1}$ und mit $(A_B^{-1})^T (q - q^*) \in \mathbb{Z}^n$ folgt

$$-\mathbf{1} < y_B - y_B^* < \mathbf{1} \quad \wedge \quad y_B - y_B^* \in \mathbb{Z}^n$$

und damit $y_B = y_B^*$.

(c) Aus $v \in \sum_{i \in B} [0, 1] a_i$ folgt $0 \leq A_B^{-1} v < \mathbf{1}$, also

$$\left\lfloor (A_B^{-1})^T v \right\rfloor = 0.$$

Nach Satz 4.4.1 gilt somit

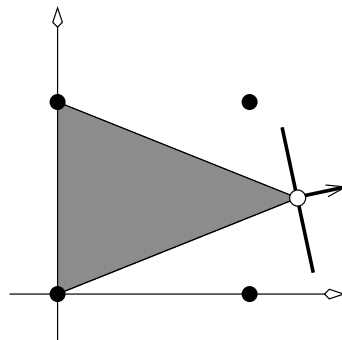
$$q^* = v - A_B^T \left\lfloor (A_B^{-1})^T v \right\rfloor = v.$$

Insgesamt folgt die Behauptung. □

4.4.5 Beispiel. Gegeben sei die ILP-Aufgabe

$$\begin{array}{rcl} \max & 5\xi_1 + \xi_2 & \\ 2\xi_1 & + & 5\xi_2 \leq 5 \\ 2\xi_1 & - & 5\xi_2 \leq 0 \\ -\xi_1 & & \leq 0 \\ \xi_1 & & \xi_2 \in \mathbb{Z}; \end{array}$$

vgl. Abbildung 4.14.



4.14 Abbildung. Zulässiger Bereich und Zielfunktion; die LP-optimale Ecke x^* ist weiss hervorgehoben.

Optimale Basislösung der LP-Relaxation ist

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

die zugehörige Basis besteht aus den ersten beiden Restriktionen. Der einfache Rundungsschnitt zur Zielfunktion ist somit gegeben durch

$$c^T x = 5\xi_1 + \xi_2 \leq \lfloor c^T x^* \rfloor = \left\lfloor \frac{27}{4} \right\rfloor = 6.$$

Der Gomory-Schnitt zur Zielfunktion berechnet sich hingegen mit

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad c^T A_B^{-1} = \left(\frac{27}{20}, \frac{23}{20} \right),$$

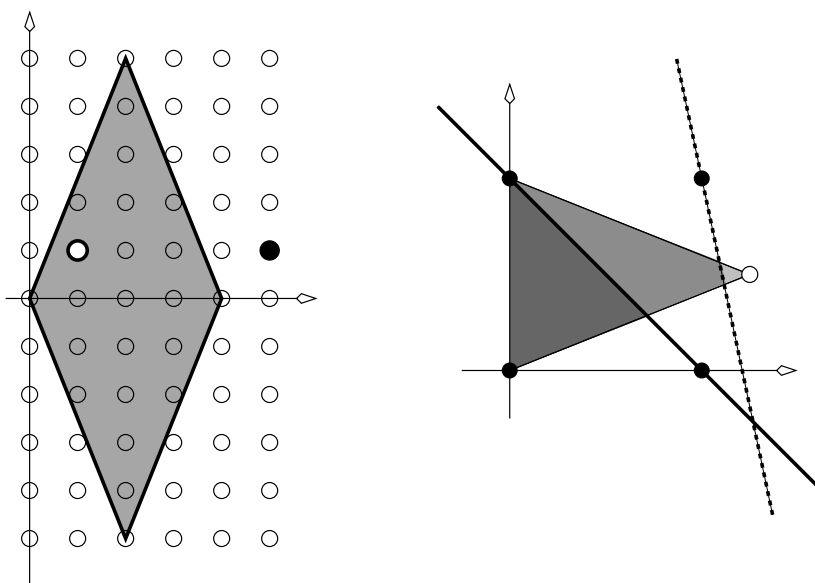
und

$$(y_B^*)^T = c^T A_B^{-1} - \lfloor c^T A_B^{-1} \rfloor = \left(\frac{7}{20}, \frac{3}{20} \right) \quad \wedge \quad (q^*)^T = (y_B^*)^T A_B = (1, 1)$$

zu

$$(q^*)^T x = (1, 1)x = \xi_1 + \xi_2 \leq \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor = \left\lfloor \frac{7}{4} \right\rfloor = 1.$$

Der Gomory-Schnitt zur Zielfunktion ist also wesentlich tiefer. Tatsächlich ist nach



4.15 Abbildung. Links: Hilbertparallelogramm, Zielfunktionsvektor c (schwarzer Punkt) und zugehöriger Gomory-Schnittvektor q^* (weiss). Rechts: Zielfunktionschnitt $5\xi_1 + \xi_2 \leq 6$ (gestrichelt) und Gomory-Schnitt $\xi_1 + \xi_2 \leq 1$ zur Zielfunktion.

seiner Hinzunahme das nächste LP-Optimum $(5/7, 2/7)^T$ mit Zielfunktionswert $27/7$, während sich durch den einfachen R-Schnitt bez. c der Zielfunktionswert nur auf 6 reduziert.

Zur Überprüfung der Konstruktion des Gomory-Schnittes rechnen wir noch nach, dass die fraktionellen Anteile der beiden Schnitte wirklich übereinstimmen. Tatsächlich gilt

$$\langle c^T x^* \rangle = c^T x^* - \lfloor c^T x^* \rfloor = \frac{27}{4} - 6 = \frac{3}{4} = \frac{7}{4} - 1 = (q^*)^T x^* - \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor = \langle (q^*)^T x^* \rangle.$$

Die Abstände der jeweiligen Schnittgeraden vom Punkt x^* sind

$$\frac{c^T x^* - \lfloor c^T x^* \rfloor}{\|c\|} = \frac{3}{4\sqrt{26}}$$

bzw.

$$\frac{(q^*)^T x^* - \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor}{\|q^*\|} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

4.4.6 Beispiel. Gegeben sei noch einmal das Ungleichungssystem von Beispiel 4.2.8, und es sei etwa die Zielfunktion $-6\xi_1 + 5\xi_2$ zu maximieren. Die optimale Ecke $x^* = (2/3, 1)^T$ der LP-Relaxation hat den ganzzahligen Zielfunktionswert 1, ein Gomory-Schnitt zur Zielfunktion ist also nicht möglich. Wir betrachten daher den Gomory-Schnitt zur ersten Komponente. Gemäß Lemma 4.4.4 erhält man mit

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

den Gomory-Schnitt

$$\xi_1 - \left\lfloor \left(-\frac{1}{3} \ 2 \right) \right\rfloor \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \left(-\frac{1}{3} \ 2 \right) \right\rfloor \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also

$$-2\xi_1 + 2\xi_2 \leq 0.$$

Der Punkt $(-2, 2)^T$ liegt wie erwartet im Hilbertparallelotop von $N_P(B)$, gehört aber nicht zur minimalen Hilbertbasis. Allerdings stimmt der durch ihn erzeugte Schnitt wegen der rechten Seite 0 mit

$$-\xi_1 + \xi_2 \leq 0$$

überein. Aber auch das geht verloren, wenn wir lediglich durch Multiplikation der ersten Ungleichung mit 2 die Darstellung des zulässigen Bereichs verändern. Ersetzen wir nämlich die erste Restriktion durch

$$-6\xi_1 + 4\xi_2 \leq 0$$

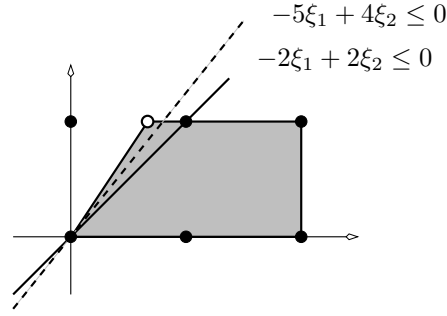
so ist wegen

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der Gomory-Schnitt nunmehr von der Form

$$\xi_1 - \left\lfloor \left(-\frac{1}{6} \ 2 \right) \right\rfloor \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \leq \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \left(-\frac{1}{6} \ 2 \right) \right\rfloor \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also



4.16 Abbildung. Gomory-Schnitte für zwei verschiedene \mathcal{H} -Darstellungen desselben zulässigen Bereichs.

$$-5\xi_1 + 4\xi_2 \leq 0,$$

ein deutlich schwächerer Schnitt als vorher.

Man beachte, dass $(-5,4)^T$ zwar (wie erwartet) im von $(-6,4)^T$ und $(0,1)^T$ aufgespannten Hilbertparallelogramm liegt, aber nicht mehr in dem ursprünglichen, von $(-3,2)^T$ und $(0,1)^T$ aufgespannten.

4.4.7 Lemma. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, $P := \{x : Ax \leq b\}$, x^* eine optimale Basislösung der LP-Aufgabe $\max\{c^T x : x \in P\}$, B eine zugehörige optimale Basis, $N := [m] \setminus B$ und $v \in \mathbb{Z}^n$ mit $v^T x^* \notin \mathbb{Z}$. Ferner seien $q^* \in \mathbb{R}^m$ der Gomory-Schnittvektor zu v . Dann gilt

$$x \in (x^* + S_P(B)) \cap H_{(q^*, \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor)}^{\leq} \implies (q^*)^T x^* - (q^*)^T x \geq \langle v^T x^* \rangle.$$

Ist ferner $v \in N_P(B)$, so folgt

$$x \in (x^* + S_P(B)) \cap H_{(q^*, \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor)}^{\leq} \implies v^T x \leq \lfloor v^T x^* \rfloor.$$

Beweis: Sei $x \in (x^* + S_P(B)) \cap H_{(q^*, \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor)}^{\leq}$. Aus

$$(q^*)^T x \leq \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor \quad \wedge \quad \langle (q^*)^T x^* \rangle = \langle v^T x^* \rangle$$

folgt

$$(q^*)^T x^* - (q^*)^T x \geq (q^*)^T x^* - \lfloor (q^*)^T x^* \rfloor = \langle v^T x^* \rangle,$$

und somit die erste Behauptung.

Wegen $x \in x^* + S_P(B)$ und $v \in N_P(B)$ gilt

$$A_B x - b_B = A_B(x - x^*) \leq 0 \quad \wedge \quad (A_B^{-1})^T v \geq 0.$$

Mit Lemma 4.4.4 folgt

$$v^T x - \lfloor v^T x^* \rfloor \leq \lfloor v^T A_B^{-1} \rfloor A_B(x - x^*) \leq 0,$$

und damit auch die zweite Behauptung. \square

4.5 Ein endlicher Schnittebenenalgorithmus

4.5.1 Prozedur: Gomory-Algorithmus der ganzzahligen Optimierung.

```

INPUT:    $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{Z}^m$ ,  $c \in \mathbb{Z}^n$ ,  $P \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ 
          optimale Basislösung  $x^*$  mit zugehöriger Basis  $B$  von  $\text{lexmax} \{c^T x : x \in P\}$ 
OUTPUT:  Meldung 'kein ganzzahliger Punkt', falls  $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$  ist
          OR Optimum von  $\max \{c^T x : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$ 
BEGIN    fertig  $\leftarrow$  'nein'
          WHILE fertig = 'nein' DO
            BEGIN
              IF  $x^* \in \mathbb{Z}^n$  THEN Meldung ' $x^*$  ist optimal!'; fertig  $\leftarrow$  'ja'
              ELSE
                BEGIN
                  IF  $c^T x^* \notin \mathbb{Z}$  THEN  $v \leftarrow c$ 
                  ELSE  $i_0 \leftarrow \min \{i : \xi_i^* \notin \mathbb{Z}\}$  AND  $v \leftarrow u_{i_0}$ 
                   $q \leftarrow$  Normalenvektor des Gomory-Schnitts zu  $v$ 
                   $A \leftarrow \begin{pmatrix} A \\ q^T \end{pmatrix}$ ,  $b \leftarrow \begin{pmatrix} b \\ \lfloor q^T x^* \rfloor \end{pmatrix}$ 
                   $P \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ 
                  IF  $P = \emptyset$  THEN Meldung 'kein ganzzahliger Punkt'
                  AND fertig  $\leftarrow$  'ja'
                ELSE
                   $x^* \leftarrow$  optimale Basislösung von  $\text{lexmax} \{c^T x : x \in P\}$ 
                  AND  $B \leftarrow$  zugehörige Basis
                END
              END
            END
          END
        END
  
```

4.5.2 Satz. Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, und sei $P := \{x : Ax \leq b\}$ beschränkt. Dann löst der Gomory-Algorithmus die ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{Ax} \quad & \leq b \\ \text{x} \quad & \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

in endlich vielen Schritten.

Beweis: Wenn im Verlauf des Algorithmus der zulässige Bereich der aktuellen LP-Relaxation leer wird, ist die gegebene ILP-Aufgabe unzulässig, da nach Bemerkung 4.1.1 kein ganzzahliger Punkt abgeschnitten wurde. Bricht der Algorithmus andererseits mit einem ganzzahligen Optimum der aktuellen LP-Relaxation ab, so ist dieses auch optimal für die ILP-Aufgabe.

Andernfalls produziert der Algorithmus eine Folge $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ von Vektoren, so dass die Folge

$$\begin{pmatrix} c^T x^{(k)} \\ x^{(k)} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}$$

streng lexikographisch fällt. Im folgenden seien A_k und b_k die aktuelle Matrix bzw. rechte Seite, $P_k = \{x : A_k x \leq b_k\}$ das aktuelle Polytop, B_k die konstruierte optimale Basis zu $x^{(k)}$ sowie q_k der aktuelle Gomory-Schnittvektor.

Da die Folge $(c^T x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und (wegen der Kompaktheit von P) auch beschränkt ist, konvergiert sie. Seien γ_0 ihr Grenzwert und $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$

$$\gamma_0 \leq c^T x^{(k)} < \lfloor \gamma_0 \rfloor + 1$$

gilt. Es folgt für $k \geq k_0$

$$\lfloor c^T x^{(k)} \rfloor = \lfloor \gamma_0 \rfloor.$$

Ist $c^T x^{(k_0)} \in \mathbb{Z}$, so gilt daher

$$\lfloor \gamma_0 \rfloor \leq \gamma_0 \leq c^T x^{(k_0)} = \lfloor c^T x^{(k_0)} \rfloor = \lfloor \gamma_0 \rfloor,$$

und für alle $k \geq k_0$ folgt

$$c^T x^{(k)} = \lfloor \gamma_0 \rfloor = \gamma_0,$$

d.h. die Zielfunktionswerte bleiben konstant.

Ist andererseits $c^T x^{(k_0)} \notin \mathbb{Z}$, so wird der Gomory-Schnitt zur Zielfunktion durchgeführt. Nach Lemma 4.4.7 gilt

$$x \in \left(x^{(k_0)} + S_{P_{k_0}}(B_{k_0}) \right) \cap H_{\left(q_{k_0}, \lfloor q_{k_0}^T x^{(k_0)} \rfloor \right)}^{\leq} \Rightarrow c^T x \leq \lfloor c^T x^{(k_0)} \rfloor.$$

Insbesondere folgt somit für $x^{(k_0+1)}$

$$\gamma_0 \leq c^T x^{(k_0+1)} \leq \lfloor c^T x^{(k_0)} \rfloor = \lfloor \gamma_0 \rfloor.$$

Spätestens nach Durchführung dieses Gomory-Schnittes bleiben somit die Zielfunktionswerte konstant und ganzzahlig. Der Rest des Algorithmus vollzieht sich de facto in der Hyperebene $H_{(c, \gamma_0)}$.

Für die Folge der ersten Komponenten

$$\left(\xi_1^{(k)} \right)_{k \in \mathbb{N}}$$

argumentieren wir nun analog. Ab dem Index $k_0 + 1$ fällt diese Folge monoton. Da P beschränkt ist, ist sie konvergent. Bezeichnet γ_1 ihren Grenzwert, so gibt es einen Index $k_1 \geq k_0 + 1$, so dass für alle $k \geq k_1$ gilt

$$\gamma_1 \leq \xi_1^{(k)} < \lfloor \gamma_1 \rfloor + 1.$$

Ist $\xi_1^{(k_1)} \in \mathbb{Z}$, so folgt wieder

$$\xi_1^{(k)} = \lfloor \gamma_1 \rfloor$$

für alle $k \geq k_1$. Ist hingegen $\xi_1^{(k)} \notin \mathbb{Z}$, so führen wir einen Schnitt zur ersten Komponente durch. Um die Bezeichnungen zu vereinfachen, setzen wir

$$B := B_{k_1} \quad \wedge \quad N_B := N_{P_{k_1}}(B_{k_1}) \quad \wedge \quad S_B := S_{P_{k_1}}(B_{k_1}) \quad \wedge \quad Q := P_{k_1}.$$

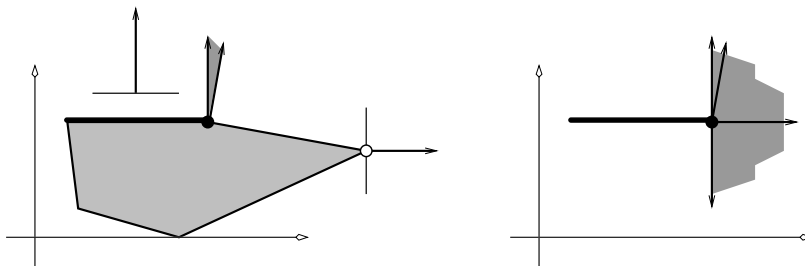
Nach Lemma 4.4.7 könnten wir einen entsprechenden Fortschritt wie für die Zielfunktion garantieren, wenn $u_i \in N_B$ läge. Das ist aber im allgemeinen nicht der Fall; vgl. Abbildung 4.17.

Da $x^{(k_1)}$ lexikographisch maximal bez. c ist und $k_1 \geq k_0 + 1$ gilt, haben wir aber

$$\xi_1^{(k_1)} = \max\{\xi_1 : x \in Q \cap H_{(c, \gamma_0)}^{\geq}\},$$

und es folgt immerhin

$$u_1 \in \text{pos}(\{-c\} \cup \{a_i^{(k_1)} : i \in B\}).$$



4.17 Abbildung. Links: Kante der bez. $c := u_2$ optimalen Punkte (fett) von Q , lexikographisches Maximum (schwarz ausgefüllter Kreis), Kegel der äusseren Normalen, Maximum von $x \mapsto \xi_1$ über Q (weiss ausgefüllter Kreis). Rechts: $Q \cap H_{(c, \gamma_0)}$; u_1 liegt im Kegel der um $-c$ erweiterten äusseren Normalen.

Seien

$$y \in \text{relint}(\text{argmax}\{c^T x : x \in Q\}),$$

und $I(y)$ bezeichne die Menge der Indizes der in y aktiven Bedingungen. Dann gilt $c \in \text{pos}\{a_i^{(k_1)} : i \in I(y)\}$, und somit

$$u_1 \in \text{pos}(\{\pm a_i^{(k_1)} : i \in I(y)\} \cup \{a_i^{(k_1)} : i \in B \setminus I(y)\}).$$

Da

$$\left(u_1^T (A_{k_1})_B^{-1}\right)^T u_i \geq 0$$

für alle $i \in B \setminus I(y)$ ist, folgt mit Lemma 4.4.4 für $k \geq k_1 + 1$ und $x \in (x^{(k_1)} + S_B) \cap H_{(c, \gamma_0)}$

$$\xi_1^{(k)} - \lfloor \xi_1^{(k_1)} \rfloor \leq \left\lfloor u_1^T (A_{k_1})_B^{-1} \right\rfloor \left((A_{k_1})_B x - (b_{k_1})_B \right) \leq 0,$$

Insbesondere gilt daher

$$\gamma_1 \leq \xi_1^{(k_1+1)} \leq \lfloor \xi_1^{(k_1)} \rfloor = \lfloor \gamma_1 \rfloor.$$

γ_1 ist also ganzzahlig, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_1 + 1$

$$\xi_1^{(k)} = \gamma_1,$$

d.h. der Wert der ersten Komponente ist ab dem Schritt $k_1 + 1$ ganzzahlig und konstant.

Mit gleicher Argumentation sukzessive für ξ_2, \dots, ξ_n folgt, dass der Algorithmus nach endlich vielen Schritten mit einem Optimum der ILP-Aufgabe abbricht. \square

5 Partitionsverfahren

5.1 Branch-and-Bound

5.1.1 Bemerkung. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $P := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ mit $\xi_{j_0}^* \notin \mathbb{Z}$ sowie

$$P_1 := P \cap H_{(u_{j_0}, \lfloor \xi_{j_0}^* \rfloor)}^{\leq} \quad \wedge \quad P_2 := P \cap H_{(u_{j_0}, \lceil \xi_{j_0}^* \rceil)}^{\geq}.$$

Dann gilt

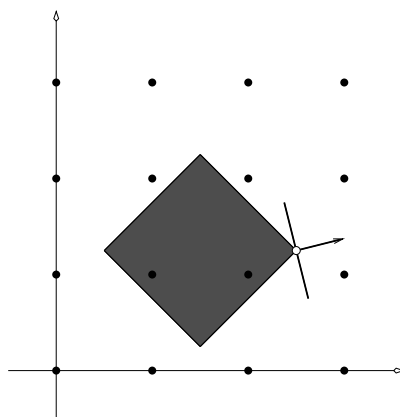
$$\max\{c^T x : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\} = \max_{i=1,2} \max\{c^T x : x \in P_i \cap \mathbb{Z}^n\}.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus $P \cap \mathbb{Z}^n = (P_1 \cap \mathbb{Z}^n) \cup (P_2 \cap \mathbb{Z}^n)$. □

5.1.2 Beispiel. Gegeben sei die ILP-Aufgabe

$$\begin{aligned} & \max 4\xi_1 + \xi_2 \\ & 4\xi_1 + 4\xi_2 \leq 15 \\ & -4\xi_1 - 4\xi_2 \leq -7 \\ & -4\xi_1 + 4\xi_2 \leq 3 \\ & 4\xi_1 - 4\xi_2 \leq 5 \\ & \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

P bezeichne den zulässigen Bereich der zugehörigen LP-Relaxation, und es sei $c := (4, 1)^T$.



5.1 Abbildung. Zulässiger Bereich.

Das LP-Optimum ist

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Da beide Komponenten fraktionell sind, kann jede für die Partition benutzt werden. Wählen wir etwa die zweite, so kommt jeweils eine der Bedingungen

$$\xi_2 \leq \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor = 1 \quad \vee \quad \xi_2 \geq \left\lfloor \frac{5}{4} \right\rfloor + 1 = 2$$

hinzu. Seien also

$$P_1 := P \cap \{x : \xi_2 \leq 1\} \quad \wedge \quad P_2 := P \cap \{x : \xi_2 \geq 2\}.$$

Die LP-Optima $x^{(1)}$ bzw. $x^{(2)}$ über P_1 bzw. P_2 sind

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad x^{(2)} := \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir fahren zunächst mit P_1 fort. Die erste Komponente von $x^{(1)}$ ist nicht ganzzahlig, somit splitten wir mittels

$$\xi_1 \leq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor = 2 \quad \vee \quad \xi_1 \geq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor + 1 = 3$$

und setzen

$$P_3 := P_1 \cap \{x : \xi_1 \leq 2\} \quad \wedge \quad P_4 := P_1 \cap \{x : \xi_1 \geq 3\}.$$

P_4 ist leer, enthält also insbesondere keine Lösung der ILP-Aufgabe. Das LP-Optimum

$$x^{[3]} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

über P_3 ist ganzzahlig und somit das ILP-Optimum über P_3 . Damit ist insbesondere nachgewiesen, dass

$$\max_{x \in P \cap \mathbb{Z}^2} c^T x \geq \max_{x \in P_3 \cap \mathbb{Z}^2} c^T x = c^T x^{(3)} = 9$$

gilt.

Falls es noch Punkte aus $P \cap \mathbb{Z}^2$ mit größerem Zielfunktionswert gäbe, so müssen diese in P_2 liegen. Andererseits ist

$$\max_{x \in P_2 \cap \mathbb{Z}^2} c^T x \leq \max_{x \in P_2} c^T x = c^T x^{(2)} = 9.$$

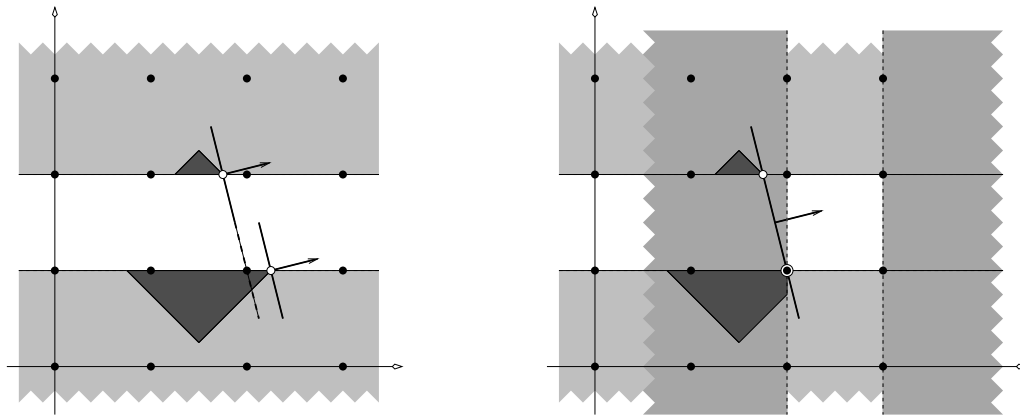
Da nicht einmal P_2 einen Vektor mit größerem Zielfunktionswert enthält, muss $x^{(3)}$ bereits optimal bez. ganz $P \cap \mathbb{Z}^2$ sein. Tatsächlich ist sogar $P_2 \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$, aber die schwächere Aussage über das LP-Optimum bez. P_2 reicht bereits, um auszuschließen, dass es noch bessere ILP-Lösungen geben kann.

5.1.3 Bemerkung. Seien P und Q Polyeder des \mathbb{R}^n , $c \in \mathbb{R}^n$, $x^* \in P \cap \mathbb{Z}^n$, und es gelte

$$\max_{x \in Q} c^T x \leq c^T x^*.$$

Dann folgt

$$x \in Q \cap \mathbb{Z}^n \quad \implies \quad c^T x \leq c^T x^*.$$



5.2 Abbildung. Links: Die Polytope P_1 und P_2 , rechts P_2 , P_3 und (da leer schlecht zu verorten) P_4 .

Beweis: Natürlich gilt $\max_{x \in Q \cap \mathbb{Z}^n} c^T x \leq \max_{x \in Q} c^T x \leq c^T x^*$. □

5.1.4 Prozedur: Branch-und-Bound-Algorithmus für ILP-Aufgaben (Grundform).

```

INPUT:    $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $P := \{x : Ax \leq b\}$  beschränkt
OUTPUT:  Meldung ' $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ '
         OR Optimum  $x^*$  von  $\max\{c^T x : Ax \leq b \wedge x \in \mathbb{Z}^n\}$ 
BEGIN     $P_0 \leftarrow P$ ,  $k \leftarrow 0$ ,  $I \leftarrow \{0\}$ ,  $\gamma \leftarrow -\infty$ 
         WHILE  $I \neq \emptyset$  DO
           BEGIN
             wähle  $i_0 \in I$  AND  $I \leftarrow I \setminus \{i_0\}$ 
             IF  $P_{i_0} \neq \emptyset$  DO
               BEGIN
                  $x^{(i_0)} \leftarrow$  Maximalpunkt von  $c^T x$  über  $P_{i_0}$ 
                 IF  $c^T x^{(i_0)} > \gamma$  THEN DO
                   BEGIN
                     IF  $x^{(i_0)} \in \mathbb{Z}^n$  THEN  $\gamma \leftarrow c^T x^{(i_0)}$  AND  $x^* \leftarrow x^{(i_0)}$ 
                     ELSE
                       BEGIN
                         wähle  $j_0 \in \{1, \dots, n\}$  mit  $\xi_{j_0}^{(i_0)} \notin \mathbb{Z}$ 
                          $P_{2k+1} \leftarrow P_{i_0} \cap \{x : \xi_{j_0} \leq \lfloor \xi_{j_0}^{(i_0)} \rfloor\}$ 
                          $P_{2k+2} \leftarrow P_{i_0} \cap \{x : \xi_{j_0} \geq \lceil \xi_{j_0}^{(i_0)} \rceil\}$ 
                          $I \leftarrow I \cup \{2k+1, 2k+2\}$  AND  $k \leftarrow k+1$ 
                       END
                     END
                   END
                 END
               END
             END
           END
         BEGIN
           IF  $\gamma = -\infty$  THEN Meldung ' $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ '
           ELSE Ausgabe des Optimalpunktes  $x^*$ 
         END
       END

```


5.1.5 Satz. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, und sei $P := \{x : Ax \leq b\}$ beschränkt. Dann löst der LP-basierte Branch-and-Bound-Algorithmus die ganzzahlige lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ Ax \quad & \leq b \\ x \quad & \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

in endlich vielen Schritten.

Beweis: Bricht der Algorithmus ab, so ist das Ergebnis korrekt. Solange er nicht abbricht, wird in jedem Verzweigungsschritt ein nicht leeres Polyeder P_{i_0} durch zwei disjunkte und echt in P_{i_0} enthaltene Polyeder ersetzt. Die Partitionshyperebenen liegen alle in

$$\{H_{(u_i, \tau)} : i \in \{1, \dots, n\} \wedge \tau \in \mathbb{Z}\}.$$

Da P beschränkt ist, hat P nur mit endlich vielen verschiedenen Partitionshalbbräumen einen nichtleeren Durchschnitt. Somit können nur endlich viele verschiedene Teilpolyeder auftreten. Insgesamt folgt hieraus die Behauptung. \square

5.1.6 Beispiel. Gegeben sei die ILP-Aufgabe

$$\begin{aligned} \max \quad & \xi_1 + \xi_2 \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 & \leq 15 \\ -2\xi_1 - 4\xi_2 & \leq -9 \\ 3\xi_1 + \xi_2 & \leq 10 \\ -4\xi_1 - 2\xi_2 & \leq -9 \\ \xi_1 \quad \xi_2 & \in \mathbb{Z}; \end{aligned}$$

Der zulässigen Bereich P_0 der LP-Relaxation ist in Abbildung 5.3 (links) dargestellt; die optimale Ecke

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

ist nicht ganzzahlig. Es gilt $I = \{0\}$, so dass P_0 aufgespalten wird. Wählen wir etwa die erste Komponente, so ergeben sich die Schnitte

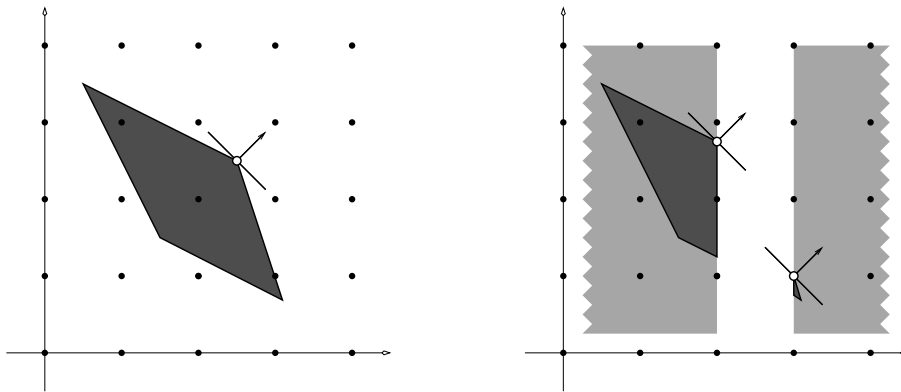
$$\xi_1 \leq \left\lfloor \frac{5}{2} \right\rfloor = 2 \quad \vee \quad \xi_1 \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3.$$

Die entsprechenden Polytope P_1 und P_2 sind in Abbildung 5.3 (rechts) dargestellt. Die aktuelle Indexmenge der aktiven Polytope ist jetzt $I := \{1, 2\}$. Als nächstes wird etwa der Index 2 bearbeitet. Das zugehörige LP-Optimum ist

$$x^{(2)} := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also ganzzahlig. Wir setzen somit $x^* := x^{(2)}$ und $\gamma := c^T x^* = 4$. Die aktuelle Indexmenge ist nun $I = \{1\}$. Für den Index 1 erhalten wir das LP-Optimum

$$x^{(1)} := \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{11}{4} \end{pmatrix}.$$

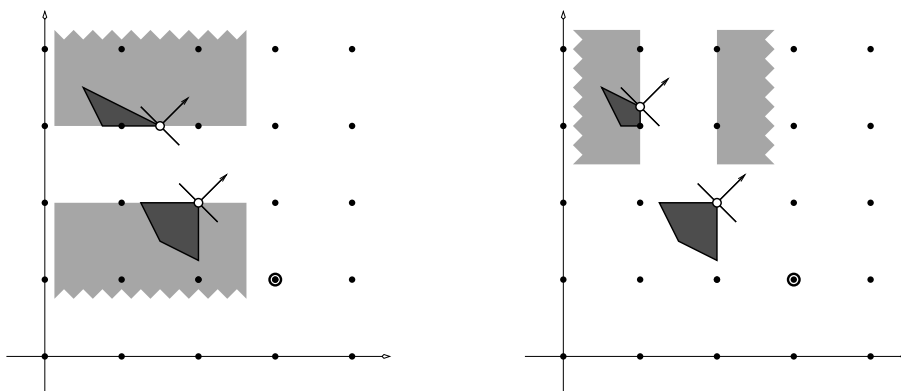


5.3 Abbildung. Links: zulässiger Bereich P_0 und LP-Optimum $x^{(0)}$. Rechts: Die Polytope P_1 und P_2 .

Die Schnitte

$$\xi_2 \leq \left\lfloor \frac{11}{4} \right\rfloor = 2 \quad \vee \quad \xi_2 \geq \left\lceil \frac{11}{4} \right\rceil = 3.$$

führen zu den neuen Polytopen P_3 und P_4 sowie zur Indexmenge $I = \{3,4\}$; vgl. Abbildung 5.4 (links).



5.4 Abbildung. Links: Teilpolytope P_3, P_4 von P_1 und aktueller ganzzahliger Maximalpunkt x^* . Rechts: Teilpolytope P_5, P_6 (leer) von P_4 .

Mit der Wahl des Index 4 erhalten wir

$$x^{(4)} := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix},$$

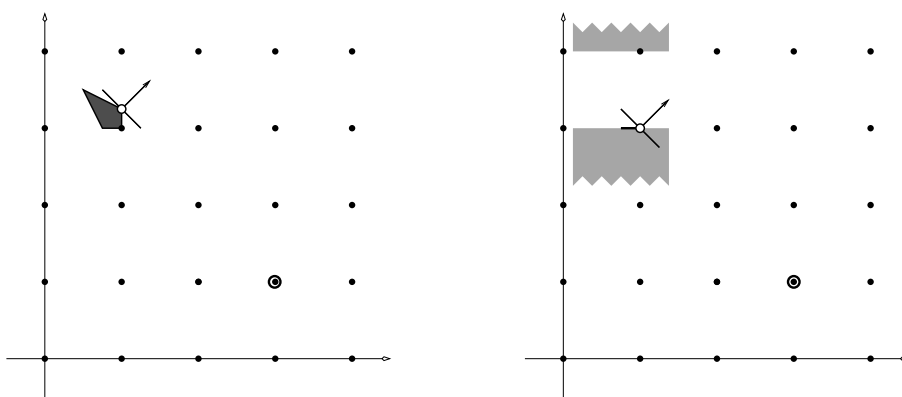
die Schnitte

$$\xi_1 \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 \quad \vee \quad \xi_1 \geq \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2,$$

die neuen Polytope P_5 , P_6 und die Indexmenge $I = \{3,5,6\}$; vgl. Abbildung 5.4 (rechts). Wählen wir nun den Index 6, so ist wegen $P_6 = \emptyset$ lediglich 6 aus I zu entfernen. Die aktuelle Indexmenge reduziert sich also auf $I = \{3,5\}$. Wählen wir nun den Index 3, so erhalten wir

$$x^{(3)} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \wedge \quad c^T x^{(3)} = 4 \leq \gamma.$$

Da P_3 keine Punkte mit besserem Zielfunktionswert als unser aktuell bester Punkt enthält, brauchen wir P_3 nicht weiter zu betrachten. Man beachte, dass P_3 auch wegen der Ganzzahligkeit von $x^{(3)}$ vollständig abgearbeitet wäre, wenn wir die aktiven Polytope in einer anderen Reihenfolge abgearbeitet hätten, die vor der Bearbeitung von P_3 noch keinen ganzzahligen Punkt mit nicht kleinerem Zielfunktionswert produziert hätte. Dann wäre lediglich eine Aktualisierung von x^* und γ , aber keine Zerlegung von P_3 erforderlich. In der hier verwendeten Reihenfolge wird P_3 und damit auch die ganzzahlige Lösung $x^{(3)}$ irrelevant.¹ vgl. Abbildung 5.4 (links).



5.5 Abbildung. Links: Das noch aktive Polytop P_5 sowie das aktuelle Optimum x^* . Rechts: Die Teilpolyeder P_7 und P_8 (leer).

Die Menge der aktiven Indizes wird somit zu $I = \{5\}$. Es gilt

$$x^{(5)} := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{13}{4} \end{pmatrix} \quad \wedge \quad c^T x^{(5)} = \frac{17}{4} > 4.$$

Die Schnitte

$$\xi_2 \leq \left\lfloor \frac{13}{4} \right\rfloor = 3 \quad \vee \quad \xi_2 \geq \left\lceil \frac{13}{4} \right\rceil = 4,$$

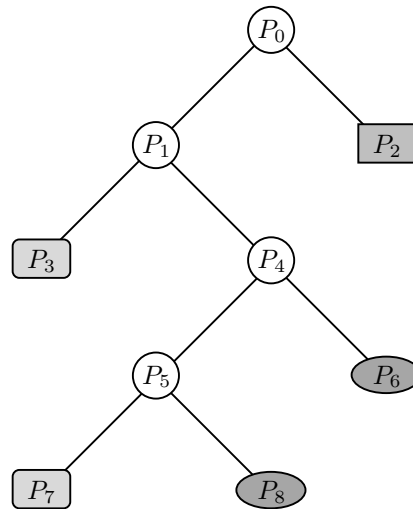
führen zu den neuen Polytopen P_7 , P_8 und I wird zu $I = \{7,8\}$; vgl. Abbildung 5.4 (rechts). Fahren wir mit dem Index 8 fort, so reduziert sich I zu $I = \{7\}$, da $P_8 = \emptyset$ ist. Das Optimum von P_7 ist

$$x^{(7)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und wegen $c^T x^{(7)} = 4$ ist kein besserer Punkt mehr vorhanden. (Hier liegt wieder dieselbe Situation vor wie bei der Bearbeitung von P_3 .) Das Verfahren bricht somit mit $I = \emptyset$ ab; $x^* = (3,1)^T$ wird als Optimalpunkt ausgegeben.

¹ Anders sähe es natürlich aus, wenn wir an *allen* Optimalpunkten interessiert wären, denn $c^T x^{(3)}$ hat den gleichen Zielfunktionswert wie x^* .

Abbildung 5.6 gibt den Verzweigungsbaum des durchgeführten Verfahrens an.



5.6 Abbildung. Verzweigungsbaum: Abbruch des Astes wegen Unzulässigkeit des Polyeders, Ganzzahligkeit der Lösung bzw. zu kleiner oberer Schranke sind durch ein Oval, ein Rechteck bzw. ein abgerundetes Rechteck gekennzeichnet.

5.2 Branch-and-Bound in der diskreten Optimierung

5.2.1 Bemerkung. Seien $G := (V, E)$ ein Graph und \mathcal{T} die Menge der Hamilton-Kreise in G . Für jedes $T \in \mathcal{T}$ erfüllt der Inzidenzvektor x_T die Bedingungen

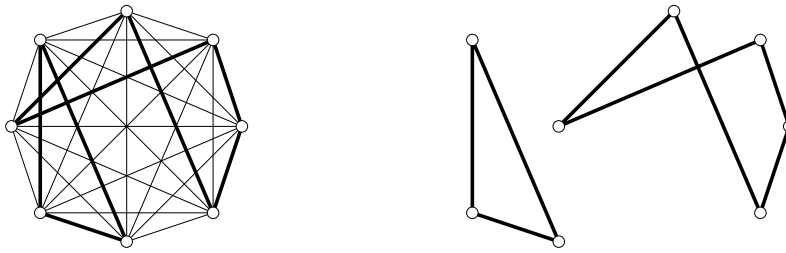
$$\begin{aligned} \sum_{e \in \delta(G, v)} \xi_e &= 2 & (v \in V) \\ \xi_e &\leq 1 & (e \in E) \\ \xi_e &\geq 0 & (e \in E) \\ \xi_e &\in \mathbb{Z} & (e \in E). \end{aligned}$$

Beweis: Sei $T \in \mathcal{T}$. Dann gilt $x_T \in \{0, 1\}$. Da jeder Knoten v von G in genau zwei Kanten von T liegt, folgt auch $\sum_{e \in \delta(G, v)} \xi_e = 2$. \square

5.2.2 Beispiel. Gegeben sei der vollständige Graph K_8 . Abbildung 5.7 zeigt links eine Kantenmenge S , deren Inzidenzvektor die Bedingungen aus Bemerkung 5.2.1 erfüllt.

Rechts ist S 'auseinandergezogen' dargestellt, so dass man leichter erkennt, dass kein Hamilton-Kreis gebildet wird, sondern tatsächlich zwei 'Subtouren' auftreten.

5.2.3 Bemerkung. Seien $G := (V, E)$ ein Graph und \mathcal{T} die Menge der Hamilton-Kreise in G . Die Lösungen von



5.7 Abbildung. K_8 mit Subtoure.

$$\begin{aligned}
 \sum_{e \in \delta(G,v)} \xi_e &= 2 & (v \in V) \\
 \sum_{e \in E(U)} \xi_e &\leq |U| - 1 & (U \subset V, \emptyset \neq U \neq V) \\
 \xi_e &\leq 1 & (e \in E) \\
 \xi_e &\geq 0 & (e \in E) \\
 \xi_e &\in \mathbb{Z} & (e \in E)
 \end{aligned}$$

sind genau die Inzidenzvektoren x_T von $T \in \mathcal{T}$.

Beweis: Seien $T \in \mathcal{T}$ und U eine nicht triviale Teilmenge von V . Da jeder Knoten von U genau zwei Kanten aus T enthält, U aber nicht ganz V ist, kann T höchstens $|U| - 1$ Kanten von U enthalten.

Ist umgekehrt x^* eine Lösung des Systems, so ist x^* der Inzidenzvektor einer Teilmenge S von Kanten von G . Da jeder Knoten mit genau zwei Kanten von S inzident ist, ist S die Vereinigung von knotendisjunkten Kreisen. Angenommen, S zerfiele in mehrere Kreise, und U wäre die Knotenmenge eines solchen. Dann wäre $\sum_{e \in E(U)} \xi_e = |U|$, im Widerspruch zur entsprechenden Bedingung. \square

5.2.4 Bezeichnung. Sei $G := (V, E)$ ein Graph. Die Gleichungen

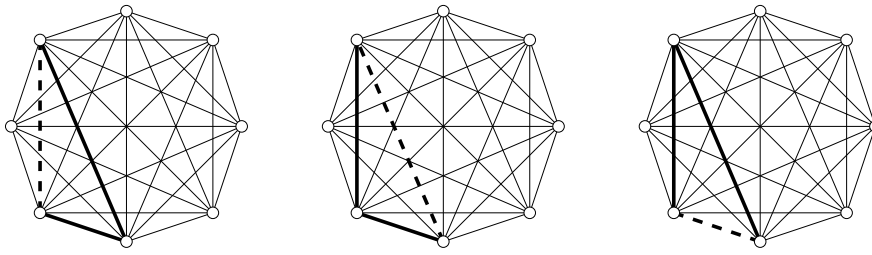
$$\sum_{e \in \delta(G,v)} \xi_e = 2 \quad (v \in V)$$

heißen **2-Matching Bedingungen** [engl.: 2-matching constraints], die Ungleichungen

$$\sum_{e \in E(U)} \xi_e \leq |U| - 1 \quad (U \subset V, \emptyset \neq U \neq V)$$

Subtoureeliminations-Bedingungen [engl.: subtour elimination constraints].

5.2.5 Beispiel. Die in Abbildung 5.7 gegebene Lösung zerfällt in zwei Subtoure. Man kann daher die in Abbildung 5.8 angegebene Aufspaltung durchführen.



5.8 Abbildung. Durch Elimination jeweils einer der drei gestrichelt eingezeichneten Kanten des Kreises der Länge 3 zerfällt die Ausgangsaufgabe in drei Teilaufgaben.