Lösung zu Aufgabe 1.10

Aufgabe 1.10. Zeige für alle $0 \leq k \leq n$, dass

$$\sum_{u=0}^{k} \binom{n+u-1}{u} \binom{n}{k-2u} = \binom{n+k-1}{k}.$$

Lösung. Definiere $S_{n,k} = \{(k_1, \ldots, k_n) : k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ und } \sum_{i=1}^{n} k_i = k\}$ als die Menge der geordneten Summendarstellungen von k durch n nicht-negative, ganzzahlige Summanden. Dann gilt bekannterweise $|S_{n,k}| = \binom{n+k-1}{k}$.

Außerdem setzen wir $B_{n,k} = \{(n_1, \ldots, n_n) : n_i \in \{0,1\} \text{ und } \sum_{i=1}^{n} b_i = k\}$. Es gilt, dass $|B_{n,k}| = \binom{n}{k}$, da jedes n-Tupel mit genau k Einsen einer k-elementigen Teilmenge von $[n]$ entspricht.

Sei $(k_1, \ldots, k_n) \in S_{n,k}$ ein beliebiges Tupel und sei w die Anzahl der ungeraden k_i. Beachte, dass, wenn k ungerade ist, auch w ungerade ist und umgekehrt. Damit ist $u = (k-w)/2$ ganzzahlig und es gilt $w = k - 2u$. Wir können unser Tupel nun eindeutig zerlegen als

$$(k_1, \ldots, k_n) = 2 \cdot (k_1', \ldots, k_n') + (b_1, \ldots, b_n),$$

so dass $(k_1', \ldots, k_n') \in S_{n,u}$ und $(b_1, \ldots, b_n) \in B_{n,(k-2u)}$. Diese Zerlegung definiert die natürliche Bijektion $f : S_{n,k} \to \bigcup_{u=0}^{k} \left(S_{n,u} \times B_{n,(k-2u)}\right)$. Also gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n+k-1}{k} = |S_{n,k}| &= \left| \bigcup_{u=0}^{k} \left(S_{n,u} \times B_{n,(k-2u)}\right) \right| \\
&= \sum_{u=0}^{k} \left| S_{n,u} \times B_{n,(k-2u)} \right| \\
&= \sum_{u=0}^{k} \binom{n+u-1}{u} \binom{n}{k-2u}.
\end{aligned}$$

Quelle: 4. QEDMO, Aufgabe 13
http://www.matheplanet.com/default3.html?call=viewtopic.php?topic=75768