2 Spieltheorie

In diesem Rahmen behandeln wir nur spezielle kombinatorische Spiele. Wir befassen uns mit neutralen Spielen zweier Personen mit perfekter Information, d.h. jeder Spieler besitzt zu jedem Zeitpunkt alle Informationen und die Zugmöglichkeiten sind unabhängig davon, welcher Spieler gerade am Zug ist. Im Folgenden sei Spieler A immer der beginnende Spieler, Spieler B sein Kontrahent.

Terminologie

- *normales Spiel*: es gewinnt der Spieler, der den letzten Zug macht
- *Gewinnstrategie*: Algorithmus, der den eigenen Erfolg garantiert

Spiel 2.1 (Symmetrisches Nim)**.** Gegeben seien zwei Haufen von je n Äpfeln. Abwechselnd nehmen A und B je eine positive Anzahl von Äpfeln von einem der Haufen. Behandle das Spiel als normales Spiel. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie lautet sie?

Lösung. B hat eine Gewinnstrategie: B kopiert jeden Zug von A, wodurch nach jedem Durchgang noch zwei Haufen mit einer identischen Anzahl von Äpfeln vorhanden sind. Nach maximal n Zügen muss A einen Haufen auflösen, worauf B den anderen Haufen auflöst und gewinnt. □

2.1 Symmetrie

Spiel 1 illustriert die grundlegendste aller Spielstrategien: Nutze Symmetrien. Allgemein gilt: In einem normalen symmetrischen Spiel hat Spieler B immer eine Gewinnstrategie, da er immer den Zug von A kopieren kann. Als Anwendung dieser Strategie ein weiteres Spiel:

Spiel 2.2 (AE P7)**.** Gegeben sei ein regelmäßiges $2n$-Eck. A und B ziehen abwechselnd je eine Diagonale, wobei keine neue Diagonale eine alte überschneiden darf. Behandle das Spiel als normales Spiel. Wer hat eine Gewinnstrategie und wie lautet sie?

Lösung. A hat eine Gewinnstrategie. A zeichnet in seinem ersten Zug eine Hauptdiagonale durch den Mittelpunkt des $2n$-Ecks. Dadurch kreiert er ein symmetrisches Spiel, bei dem nun A die Rolle von Spieler B und B die Rolle von Spieler A übernimmt. Somit hat Spieler A anschließend durch Kopieren der Züge von B eine Gewinnstrategie. □

Zur Anwendung. Manchen Spielen sieht man Symmetrien nicht gleich an oder die Symmetrie muss erst erzeugt werden. Ein großer Teil der Spiele sind nicht symmetrisch, daher wenden wir uns nun allgemeineren Konzepten zu.

2.2 L-W-Partitionierung

Spiel 2.3 (AE P2)**.** Auf einem Tisch befinden sich 10^7 Kürbiskerne. A und B entfernen abwechselnd p^n Kürbiskerne, wobei $p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}_0$in jedem Zug frei gewählt werden dürfen. Behandle das Spiel als normales Spiel. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie lautet sie?

Hinweis. Überlege dir zuerst, welche Spielsituationen zu einer Niederlage führen.

Lösung. 6 ist die erste natürliche Zahl, die keine reine Primzahlpotenz ist. 6 verbleibende Kerne garantieren also die Niederlage eines Spielers, da man selbst die Kerne nicht entfernen kann, der Gegner aber den Rest im nächsten Zug abräumen kann. Man beobachtet, dass man auch von einem Vielfachen von 6 nicht wieder zu einem Vielfachen von 6 in einem Zug kommen kann. Somit garantieren alle Vielfachen von 6 eine Niederlage. Von jeder anderen Position aber ist es möglich zu einem Vielfachen von 6 zu kommen. Somit garantieren diese Positionen einen Sieg. Da $10^7 \notin 6\mathbb{Z}$, hat A eine Gewinnstrategie: Er reduziert die Anzahl der Kürbiskerne immer auf ein Vielfaches von 6. □

Spiel 3 illustriert das Prinzip der L-W-Partitionierung, des vermutlich wichtigsten Ansatzes zur Lösung kombinatorischer Spiele.

Allgemeine Vorgehensweise. Man stelle den gerichteten Graphen aller möglichen Spielverläufe auf, wobei jede mögliche Spielsituation durch einen Knoten und jeder mögliche Zug durch eine gerichtete Kante repräsentiert wird. Nun partitioniert man die Knotenmenge P, in die beiden Mengen:

- W ist die Menge der Winning-Positions, d. h. die Menge der Positionen, die eine Gewinnstrategie ermöglichen.
- L ist die Menge der Losing-Positions, das Komplement von W in P.

In einem normalen Spiel gehören z.B. die Spielendpositionen zu der Knotenmenge L. Davon ausgehend verläuft die Konstruktion nach folgenden Regeln:

- Jeder Knoten mit einer Kante zu einem Knoten aus L, ist in W ($\forall v \in L : N_{in}(v) \subseteq W$).
- Jeder Knoten von dem aus alle ausgehenden Kanten zu Knoten in W führen, ist in L ($\forall v \in L : N_{out}(v) \subseteq W$).

Üblicherweise geht man bei diesem Ansatz so vor:

1. Betrachte kleiner Fälle,
2. Working backwards: Überlege zuerst, welche Spielsituationen sofort zu einer Niederlage führen und beginne dort mit der Konstruktion,
3. Betrachte die ersten Winning- und Losing-Positions,
4. Verallgemeinere!

Spiel 2.4 (Nim (3,2,1))**.** Auf einem Tisch befinden sich 3 Haufen von Kirschen zu je $3, 2, 1$ Kirschen. Abwechselnd nehmen A und B je eine positive Anzahl von Kirschen von einem der Haufen. Behandle das Spiel als normales Spiel. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie lautet sie?

Lösung. Man schreibt alle Elemente von L und W auf. Dabei beginnt man mit den finalen Losing Positions, also $(0, 0, 0)$ und führt dann alle Nachbarknoten an, die dann zwangsläufig zu W gehören, usw.:

$$L = \{(0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (2,2,0), (3,2,1)\}$$
$$W = \left\{ \begin{array}{l} (1,0,0), (2,0,0), (3,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (0,0,1), (2,1,0), (3,1,0), (1,2,0), \\ (1,1,1), (2,0,1), (3,0,1), (1,2,1), (2,1,1), (3,1,1), (0,2,1), (3,2,0), (2,2,1) \end{array} \right\}.$$

Damit ist P vollständig partitioniert (Es gibt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Elemente). Eine Gewinnstrategie hat somit B. □

Bemerkung. Der L-W-Ansatz ist universell einsetzbar, doch kann man nicht immer Regelmäßigkeiten erkennen und muss gegebenenfalls sehr viele Situationen auflisten.

Spiel 2.5 (Batchet's game, AE E1)**.** Seien $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. Auf einem Tisch befinden sich n Birnen. A und B ziehen abwechselnd je eine Anzahl j,$1 \leq j \leq k$, von Birnen ab. Behandle das Spiel als normales Spiel. Welcher Spieler hat eine Gewinnstrategie und wie lautet sie?

Hinweis. Löse das Spiel zuerst für die Spezialfälle $k = 4$, $n = 10, 11$ und verallgemeinere dann.

Lösung. $k = 4$: Working backwards:

- $0 \in L \Rightarrow 1, 2, 3, 4 \in W$.
- $5 \in L$, da jeder mögliche Zug zu einer Position in W führt.
- $6, 7, 8, 9 \in W$, denn sie erlauben einen Zug auf 5, die in L liegt.
- Iteration liefert: $\underbrace{0}_{L}\ \underbrace{1\,2\,3\,4}_{W}\ \underbrace{5}_{L}\ \underbrace{6\,7\,8\,9}_{W}\ \underbrace{10}_{L}\ \underbrace{11}_{W}$

Man überzeugt sich, dass L aus den Vielfachen von 5 besteht. Somit gilt für $n = 10$: A verliert, $n = 11$: A gewinnt (bei jeweils optimalen Strategien).

$k \in \mathbb{N}$: Analog $L = (k + 1)\mathbb{N}_0$ und $W = \mathbb{N}\backslash(k + 1)\mathbb{N}_0$. Gilt also $n \in W$, so hat A eine Gewinnstrategie und für $n \in L$ hat B eine Gewinnstrategie. □

2.3 Nim-Werte

Zur Verallgemeinerung der L-W-Partitionierung betrachten wir die allgemeine Variante von Nim:

Spiel 2.6 (Nim)**.** Das Spiel beginnt mit n Haufen aus $m_k, k \in [n]$ Zählern. Die beiden Spieler entfernen abwechselnd von genau einem Haufen eine (positive) Anzahl von Zählern. Der Spieler der den letzten Zähler entfernt, gewinnt.

Ein Haufen ($n = 1$). Das Spiel bekommt die Größe m_1 des Haufens als Nim-Wert.

Beobachtung. Positive Werte entsprechen Winning-Positions, 0 einer Losing-Position.

Mehrere Haufen ($n \geq 2$). Berechne die Größe eines äquivalenten einzigen Nim-Haufens durch *Nim-Addition* $\oplus$ der Nim-Werte:

- 2 Haufen gleicher Größe: Symmetrie-Prinzip $\rightsquigarrow$ Losing-Position $\rightsquigarrow$ Nim-Wert 0.

  Nim-Werte sind also ihr eigenes negatives (bzgl. $\oplus$).
- Allgemein: $\oplus \mathrel{\hat{=}}$ Addition in Basis zwei ohne Übertrag oder auch XOR-Verknüpfung.
- $\oplus$ ist kommutativ und assoziativ, mit neutralem Element 0.

Die Berechnung und die daraus folgende Strategie zeigt sich am besten an einem Beispiel:

Spiel 2.7. $n = 4, m = (1, 2, 3, 5)$.

	binär			dezimal
|	0	0	1	1
||	0	1	0	2
|||	0	1	1	2 + 1
|||||	1	0	1	4 + 1
	1	0	1	4 + 0 + 1

Strategie.

1. *Positiver Nim-Wert*: Ziel: Erreiche Nim-Wert 0.

   Dazu: Wähle einen Haufen mit Beitrag zum größten (linkesten) Nicht-0-Eintrag des Nim-Wertes. Durch entfernen von Zählern von diesem Haufen können alle niedrigeren Stellen beliebig beeinflusst werden, also kann der Nim-Wert 0 erreicht werden. Ein Zug, der immer möglich ist: Entferne die höchste nicht-0 2-er Potenz abzüglich aller niedrigeren nicht-0 2-er Potenzen (Man kann sich leicht überlegen, dass das stets eine positive Zahl ist).
2. *Nim-Wert* 0: Jeder mögliche Zug verändert mindestens eine der Stellen um 1. Man kann also unmöglich wieder Nim-Wert 0 erhalten.
3. Damit sind die Eigenschaften der L-W-Partitionierung erfüllt und die Strategie ist bewiesen.

Verallgemeinertes Nim-Spiel. Erlaube als Zug das Zurücklegen einer beliebigen Anzahl von Zählern auf einen Haufen. Jeder solche Zug kann sofort rückgängig gemacht werden, ändert damit also nichts am Ausgang des Spieles. Nur endliche Zeit muss durch zusätzliche Regeln garantiert werden.

Satz 2.8 (Sprague-Grundy)**.** *Jedes endliche neutrale Spiel ist zu einem Nim-Haufen äquivalent.*

Algorithmus 2.9. *Das Vorgehen hierzu ist wie folgt:*

1. *Jede Endposition erhält Nim-Wert 0.*
2. *Jede andere Position erhält den minimalen Nim-Wert, den keine von ihr aus erreichbare Position innehat.*

Beweis. Man kann sich leicht überlegen, dass dieses Vorgehen zur L-W-Partitionierung äquivalent ist. Damit ist auch Sprague-Grundy bewiesen. □

Zur Anwendung.

1. Nim-Werte sind der L-W-Partitionierung nur dann überlegen, wenn ein Spiel in *unabhängige Komponenten* zerfällt, da dann die Nim-Addition große Vorteile mit sich bringt. Trotzdem sollte man nicht zu schnell aufgeben, da solche Komponenten nicht immer sofort erkennbar sind.

2. Jedes passende Spiel kann durch Vervielfachung (oder Addition mit einem anderen) zu einem solchen gemacht werden.

3. Zusätzlich können sie helfen Periodizitäten im L-W-Graph zu erkennen, aber das wird für uns keine weitere Bedeutung haben.

Spiel 2.10 (Northcotts Spiel, JHC)**.** Betrachte ein Schachbrett mit Türmen wie folgt:

			♦				
◊							♦
		◊	◊			◊	
				♦		♦	
♦	◊						
		♦			♦		
	♦				◊		◊
				◊			

Spieler weiß und schwarz bewegen abwechselnd einen Turm ihrer Farbe in seiner jeweiligen Spalte, wobei nicht geschlagen oder übersprungen werden darf. Verlierer ist derjenige der keinen erlaubten Zug mehr ausführen kann.

Lösung. Man kann dieses Spiel als verallgemeinertes Nim-Spiel auf den Abständen der Türme jeder Spalte auffassen. Der Nim-Wert ist also

$$2 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 1 \oplus 3 \oplus 0 \oplus 5 = 3 \oplus 5 = (1+2) \oplus (1+4) = (2+4)\,.$$

Damit kann weiß gewinnen. Die nötige Endlichkeitsbedingung liefert die Endlichkeit des Schachbretts. Weiß kann schwarz zurückdrängen. Im verallgemeinerten Nim-Spiel entspräche dies einer begrenzten Anzahl an Zählern, die ein Spieler zurücklegen kann. □

Satz 2.11. *Wann immer ein endliches normales Spiel durch eine endliche Familie von nichtnegativen Zahlen ausgedrückt werden kann, von denen in jedem Zug genau eine verändert wird, wobei beliebige Verringerungen stets möglich sind, ist es äquivalent zum Nim-Spiel mit den entsprechenden Haufen-Größen.*

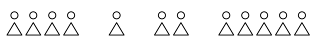
Bemerkung. Das Spiel muss hierzu nicht zwingend neutral sein, wie Northcotts Spiel zeigt.

2.4 Weitere Aufgaben

Soweit nicht anders angegeben lautet die Aufgabenstellung: *Finde eine Gewinnstrategie für einen der Spieler.*

Aufgabe 2.12 (AE P17)**.** A und B schreiben abwechselnd natürliche Zahlen$\leq p$ an die Tafel, wobei alle Teiler von Zahlen, die bereits an der Tafel stehen, verboten sind. Behandle das Spiel als normales Spiel. Wer gewinnt für (a) $p = 10$? (b) $p = 1000$?

Aufgabe 2.13 (Kayles, JHC)**.** Zwei Spieler werfen abwechselnd auf die folgende Anordnung von Kegel-Reihen:



Wir nehmen an, dass beide Spieler mit einem Wurf nach Belieben genau einen oder zwei benachbarte Kegel einer Reihe umwerfen. Wer den letzten Kegel umwirft gewinnt.

Aufgabe 2.14 (AE P3)**.** Beginnend bei $n = 2$ addieren A und B je einen echten Teiler des bisherigen n zu diesem hinzu. Der Gewinner ist der Spieler, der 1990 zuerst übertrifft. Wer gewinnt?

Aufgabe 2.15 (Putnam 1995 B5)**.** Beginne mit vier Haufen von Bohnen, die 3, 4, 5 und 6 Bohnen enthalten. Die beiden Spieler führen abwechselnd einen der beiden folgenden Züge aus:

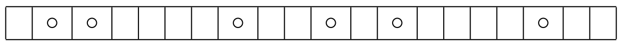
1. Eine Bohne von einem Haufen entfernen, so dass mindestens zwei Bohnen zurückbleiben.

2. Einen vollständigen Haufen aus zwei oder drei Bohnen entfernen.

Der Spieler, der den letzten Haufen entfernt, gewinnt.

Aufgabe 2.16 (TT 2002 F Sen 7a))**.** Ein Schaltplan hat die Form eines 3×3 Gitters mit 16 Knoten, die je mit Kabeln verbunden sind. Manche der Kabel sind eventuell durchgebrannt. In einem Test kann ein Elektriker ein beliebiges Paar von Knoten auswählen und überprüfen, ob zwischen den Knoten Strom fließt, also überprüfen, ob es einen Weg gibt, der beide Knoten verbindet und nur intakte Kabeln benutzt. Der Elektriker weiß, dass Strom von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten fließt. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl von Tests, die er benötigt, um dies zu zeigen.

Aufgabe 2.17 (Münzen, JHC)**.** Auf einem Spielfeld aus einer Reihe von 20 Quadraten sind 6 Münzen wie folgt angeordnet:



Spieler A und B bewegen abwechselnd eine der Münzen eine beliebige Anzahl von Feldern nach links. Verlierer ist derjenige der keine Münze mehr verschieben kann.

Aufgabe 2.18 (AE P24)**.** Von einem Haufen mit n Zwetschgen zieht A in seinem ersten Zug $t \in \{1, 2, ..., n-1\}$ ab. Von da an, zieht jeder Spieler einen Teiler der Anzahl der Zwetschgen, die im vorherigen Zug weggenommen wurden, von den Zwetschgen ab. Behandle das Spiel als normales Spiel. Welche Anfangspositionen sind Gewinnpositionen für A und B?

Aufgabe 2.19 (Wythoff's game, AE P1)**.** Auf einem Tisch liegen zwei Haufen von Nüssen. A und B ziehen in jedem Zug eine beliebige Anzahl von einem Haufen oder dieselbe Anzahl von beiden Haufen ab. Behandle das Spiel als normales Spiel. Finde einen Algorithmus um alle Losing-Positions zu finden.

Aufgabe 2.20 (Der Silberdollar, JHC)**.** Das Spiel funktioniert ähnlich wie Aufgabe 2.17, mit dem Unterschied, dass eine der Münzen durch einen Silberdollar ersetzt wird und das äußere linke Quadrat durch einen Geldbeutel ersetzt wird, der beliebig viele Münzen fasst. Derjenige Spieler, der den Silberdollar in den Geldbeutel wirft, verliert. Finde eine Gewinnstrategie für allgemeine Feldlängen und Anfangsbelegungen.

Hinweise. 2pt

2.12
1. Symmetrie
2. Teil (b) nicht konstruktiv

2.13 Nim-Werte

2.14
1. L-W-Partitionierung
2. Was passiert bei geraden bzw. ungeraden Zahlen?

2.15 Nim-Werte

2.16
1. Symmetrie
2. Betrachte eine Hauptdiagonale.

2.17
1. Nim-Werte
2. Satz 2.11

2.18
1. Symmetrie
2. Benutze 2-er Potenzen.
3. Wie kann A oder B eine symmetrische Situation erreichen?

2.19
1. L-W-Partitionierung
2. Betrachte die Differenz zwischen den Anzahlen von Nüssen je Haufen.

2.20
1. Nim-Werte
2. Strategie von 2.17 mit Fallunterscheidung über das Geldbeutel-Feld.

2.5 Quellen

- AE: Arthur Engel - Problem Solving Strategies, Springer, New York, 1998 (Kapitel 14)
- JHC: John H. Conway - Über Zahlen und Spiele, Viehweg, Braunschweig, 1983
- Putnam: William Lowell Putnam Competition
  `http://amc.maa.org/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml` (11.11.2012)
- TT: Turnier der Städte `http://www.math.uni-hamburg.de/stw/problems.html` (11.11.12)