2 Reihen

$\mathbb{K}$-wertige *Reihe*:

$$S := S_a := \sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{=:S_n(a)=:S_n}, \quad (a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}.$$

- Harmonische Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$
- Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$
- Binomialreihe: $(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$

2.1 Konvergenz

- *Konvergenz*: S_n konvergiert.
  - $\Rightarrow a_k \to 0$
  - Beispiel: Geometrische Reihe: $|x| < 1$:
  $$\sum_{k=0}^{n} x^n = \frac{1-x^n}{1-x} \to \frac{1}{1-x}.$$
  - **Leibniz**: $0 \leq b_k \to 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k b_k$ konvergiert.
    - $\Rightarrow S - S_n \leq a_{n+1}$.
- *Absolute Konvergenz*: $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent.
  - $\Rightarrow$ Jede Umordnung geht gegen den selben Grenzwert.
  - **Majorantenkriterium**
    - $|a_k| \leq |b_k|$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent $\Rightarrow S$ absolut konvergent.
  - **Quotientenkriterium**
    - $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1 \Rightarrow S$ absolut konvergent.
    - $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ ffa. $k \Rightarrow S$ divergent.
  - **Wurzelkriterium**
    - $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow S$ absolut konvergent.
    - $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ ffa. $k \Rightarrow S$ divergent.
- **Integralvergleichskriterium**: $f : [p, \infty) \to \mathbb{R}_+$
$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \text{ konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \int_p^{\infty} f(x)\, dx \text{ konvergent.}$$
- **Cauchys Verdichtungskriterium**: $(a_n)_n, a_n \geq 0$ monoton fallend $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat das selbe Konvergenzverhalten wie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Aufgabe 1. Bestimme das Konvergenzverhalten von

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{(alternierende harmonische Reihe)}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \qquad \text{(allgemeine harmonische Reihe)}$$

$$S_3 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^{\alpha}} \quad \alpha > 0$$

(in Abhängigkeit von α).

Bemerkung. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2.3 Techniken

- Summationsreihenfolge vertauschen / umindizieren:

  Satz (Fubini/Tonelli)**.** *$a_{n,k} \geq 0$ oder $\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{K(n)} |a_{n,k}| < \infty \Rightarrow$ Summationsreihenfolge vertauschbar, i.e.*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k},\\ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} &= \sum_{k\leq n}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} a_{n,k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{k+l,k} \qquad (l := n-k)\end{aligned}$$

  (vgl. Umordnung bei absoluter Konvergenz.)

- Integrieren/Ableiten von Potenzreihen (s. handschriftlicher Teil)
- **Cauchy-Produkt**: $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$
  - S_a absolut konvergent, S_b (absolut) konvergent $\Rightarrow S_c = S_a S_b$ (absolut) konvergent.
  - S_a, S_b, S_c konvergent $\Rightarrow S_c = S_a S_b$
- Teleskopsummen (Partialbruchzerlegung)

3 Hausaufgaben

Aufgabe 2. Sei (u_n) eine Folge mit $u_n \in \mathbb{R}^+$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = u > 0.$$

Zeige:

$$\sqrt[n]{|u_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} u.$$

Aufgabe 3. 1. Finde Potenzreihendarstellungen von $\frac{1}{(1-x)^2}$ und $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.

2. Berechne eine geschlossene Form für $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k$.

Aufgabe 4. Berechne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

Aufgabe 5 (P&B372)**.** Berechne

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!k!}{(n+k+2)!}.$$

Aufgabe 6 (IMC2011D2P1)**.** Let $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence with $\frac{1}{2} < a_n < 1$ for all $n \geq 0$. Define the sequence

$$x_0 = a_0, \qquad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n} \quad (n \geq 0)\,.$$

What are the possible values of $\lim_{n\to\infty} x_n$? Can such a sequence diverge?