Funktionentheorie I

Bernhard Aigner, Josias Reppekus

13. Mai 2013

1 Holomorphie

Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ stets offen und wegzusammenhängend und $B := B_1(0) \subseteq \mathbb{C}$.

Definition 1.1. Wir sagen f ist *holomorph* auf U und schreiben $f \in H(U) :\Leftrightarrow f$ ist auf U komplex differenzierbar, i.e. $\forall z_0 \in U$ existiert $Df(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Proposition 1.1. *1. f ist holomorph $\Leftrightarrow$ f ist auf U lokal durch Potenzreihen darstellbar, i.e.*

$$\forall z_0 \in U: \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,z_0} (z - z_0)^k \quad \textit{um } z_0.$$

2. f ist holomorph $\Leftrightarrow$ f ist beliebig oft komplex differenzierbar.

3. Schreibt man $f \in \mathscr{C}^1(U)$ als

$$f(z) = u(x,y) + v(x,y) \quad \textit{für} \quad z = x + iy \quad \textit{und} \quad u, v \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R}),$$

so ist f holomorph $\Leftrightarrow$

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_y u = -\partial_x v \qquad \text{(Cauchy-Riemann-DGl.)}$$

Bemerkung. 1. Holomorphie überträgt sich auf Verknüpfungen, Summen, Produkte in Quotienten (ohne Nennernullstellen) und es gelten die normalen Ableitungsregeln.

2. Bekannte Potenzreihen sind holomorph auf ihren Konvergenzradien:
   (a) $e, \sin, \cos, \sinh, \cosh, f \in \mathbb{C}[X]$ auf $\mathbb{C}$
   (b) $\ln$ auf $\mathbb{C} \backslash (-\infty, 0]$.

3. Durch die C-R-DGl. legen sich u und v bis auf additive Konstanten gegenseitig fest.

Aufgabe 1.1. 1. Untersuche auf Holomorphie:
   (a) $f(z) = 2x^2 + 4ixy - ix - 2y^2 + y + 4$
   (b) $f(z) = \overline{z}$
   (c) Für $f \in H(U)$: $\overline{f(\overline{z})}$.

2. Zeige: $f \in H(U), f(z) \in \mathbb{R} \ \forall z \in U \Rightarrow f$ konstant.

2 Konsequenzen

Satz 2.1 (Identitätssatz)**.** *Seien $f, g \in H(U)$ und $f = g$ auf einer Menge mit Häufungspunkt in $U \Rightarrow f = g$.*

Satz 2.2 (Liouville)**.** *Sei $f \in H(\mathbb{C}), m \in \mathbb{N}_0, \quad f(z) = \mathcal{O}(|z|^m) \quad z \to \infty \Rightarrow f$ ist Polynom und $\deg f \leq m$.*

Bemerkung. Es folgt sofort, dass beschränkte $f \in H(\mathbb{C})$ konstant sind.

Satz 2.3 (Maximumsprinzip)**.** *Sei $f \in H(U)$, dann gilt*

1. *$|f|$ hat lokales Maximum in $z_0 \in U \Rightarrow f$ ist konstant.*
2. *U beschränkt, $f \in \mathscr{C}^0\left(\overline{U}\right) \Rightarrow \sup_{z\in U} |f(z)| \leq \max_{z\in\partial U} |f(z)|$.*

Aufgabe 2.1. Sei $f \in H(B_R(0))$ nicht konstant und nullstellenfrei. Zeige, dass

$$M : [0, R) \to \mathbb{R}, \quad M(r) := \min_{|z|=r} |f(z)|$$

streng monoton fällt.

Aufgabe 2.2. Finde alle $f \in H(B)$:

1. $f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \forall n$
2. $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n} \quad \forall n$
3. $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq e^{-n} \quad \forall n$

Gibt es für $f \in H(B\setminus\{0\})$ weitere Lösungen?

Aufgabe 2.3. Sei $f \in H(U)$ nicht konstant, $z_0 \in U, f'(z_0) = 0, f(z_0) \neq 0$. Zeige: z_0 ist Sattelpunkt von $|f|$.

Aufgabe 2.4. Gibt es $f \in H(B)$ bzw. $f \in H(B\setminus\{0\})$:

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{1}{n} \quad \forall n?$$

Aufgabe 2.5. Gibt es ein $f \in H(B)$:

$$|f(z)| = e^{|z|} \quad \forall z \in B?$$

Aufgabe 2.6. Zeige, dass es kein nicht konstantes $f \in H(\mathbb{C})$ gibt:

$$f(z+1) = f(z) = f(z+i) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 2.7. Sei $f \in H(U)$, $\forall z_0 \in U \exists n = n(z) \in \mathbb{N}$:

$$a_{n,z_0} = 0, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,z_0} (z - z_0)^k \quad \text{um } z_0.$$

Zeige, dass f ein Polynom ist.

Notiz. VJIMC04c2P4 stellt die gleiche Aufgabe für $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$-Funktionen.

Aufgabe 2.8. Zeige: $f \in H(\mathbb{C}), \operatorname{Re} f(z) \leq M \ \ \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow f$ konstant.

Aufgabe 2.9 (VJIMC97c2P2)**.** Sei $f \in H(\mathbb{C}), |f(z)| = 1 \quad \forall |z| = 1$. Zeige: $\exists \theta \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0$:

$$f(z) = e^{i\theta} z^k \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Problem 2.1 (IMC 2009, Tag 1, Problem 4)**.** Sei $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}\, \forall k \in [n]_0$ und seien $1 = c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_n \geq 0$ eine endliche konvexe Folge (d.h. $2c_k \leq c_{k-1} + c_{k+1}\, \forall k \in [n-1]$). Definiere $q(z) = \sum_{k=0}^n c_k a_k z^k$. Zeige:

$$\max_{|z|\leq 1} |q(z)| \leq \max_{|z|\leq 1} |p(z)|.$$