Aufgabe der Woche 3: (4. Aufgabe am 2. Tag vom IMC 2005) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ dreimal differentierbar. Zeige, dass ein $\xi \in [-1,1]$ existiert, sodass

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$

Lösung (David): Wir beweisen zunächst:

Lemma 0.1. *Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine dreimal differenzierbare Funktion mit $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$ und $f'(0) = 0$, dann gibt es ein $\xi \in [-1,1]$ mit $f'''(\xi) = 0$.*

Proof. Durch mehrfache Anwendung des Mittelwertsatzes folgt: Es gibt $x_1 \in (-1,0)$ und $x_2 \in (0,1)$ mit

$$f'(x_1) = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = 0, f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 0$$

Damit gibt es $y_1 \in (x_1, 0)$ und $y_2 \in (0, x_2)$ mit

$$f''(y_1) = \frac{f'(0) - f'(x_1)}{0 - x_1} = 0, f''(y_2) = \frac{f'(x_2) - f'(0)}{x_2 - 0} = 0$$

Schließlich gibt es also ein $\xi \in (y_1, y_2) \subset [-1,1]$ mit

$$f'''(\xi) = \frac{f''(y_2) - f''(y_1)}{y_2 - y_1} = 0. \qquad \square$$

Nun zeigen wir den allgemeinen Fall. Wir definieren die Funktion $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) + \left(f'(0) - \frac{f(1) - f(-1)}{2}\right) x^3 + \left(f(0) - \frac{f(1) + f(-1)}{2}\right) x^2 - f'(0)x - f(0)$$

für alle $x \in [-1,1]$.
g ist dann offensichtlich dreimal differenzierbar und es gilt $g(-1) = g(0) = g(1) = 0$ sowie $g'(0) = 0$. Nach Lemma 0.1 gibt es also ein $\xi \in [-1,1]$ mit $g'''(\xi) = 0$. Es gilt somit

$$0 = g'''(\xi) = f'''(\xi) + 6\left(f'(0) - \frac{f(1) - f(-1)}{2}\right)$$

und damit

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0)$$