Aufgabe der Woche 4: Seien A, B reelle $n \times n$-Matrizen mit $\mathrm{rk}(B) = 1$. Zeige, dass

$$\det((A - B)(A + B)) \leq (\det A)^2.$$

Lösung durch Zurückführung auf Spezialfall: Falls $n = 1$, ist die Aussage trivial. Sei also $n \geq 2$. Wir definieren

$$B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Falls $B = B'$, so zeigt Entwicklung nach der ersten Zeile oder Spalte von $A + B'$ bzw. $A - B'$, dass

$$\begin{aligned} \det(A + B') &= \det(A) + \det(A_{n-1}) \\ \det(A - B') &= \det(A) - \det(A_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei A_{n-1} die rechte, untere $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix von A ist.

Im Allgemeinen ist $B = SB'T$ mit $S, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Schreibe $A = SA'T$. Dann ist

$$\begin{aligned} \det((A - B)(A + B)) &= \det(S(A' - B')T \cdot S(A' + B')T) \\ &= (\det S)^2 \cdot \det((A' - B')(A' + B')) \cdot (\det T)^2 \\ &\leq (\det S)^2 \cdot (\det A')^2 \cdot (\det T)^2 \\ &= (\det A)^2. \end{aligned}$$

Lösung Erschlagen der Aufgabe: Allgemein gilt, dass $P(t) := \det(A + tB)$ ein Polynom vom Grad maximal $\mathrm{rk}(B)$ ist, in unserem Fall also von Grad 1. Zudem gilt $P(0) = \det A$, also $P(t) = \det A + b \cdot t$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Nun ist

$$\det((A - B)(A + B)) = P(-1) \cdot P(1) = (\det A - b)(\det A + b) = (\det A)^2 - b^2 \leq (\det A)^2$$