Aufgabe der Woche 8: Es seien reelle Zahlen a_{ij} für $1 \leq i \neq j \leq n$, sowie b_i und c_i für $i = 1, \dots, n$ vorgegeben, sodass $b_i \neq c_i$. Betrachte die Menge von 2^n reellen $n \times n$-Matrizen $A = (a'_{ij})_{i,j}$ mit Einträgen

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= a_{ij} \text{ falls } i \neq j \\ a'_{ii} &\in \{b_i, c_i\}. \end{aligned}$$

Zeige, dass mindestens eine dieser Matrizen invertierbar ist.

Lösung via Induktion: Wenn $n = 1$ ist die Aussage trivial. Ansonsten bezeichne A' die obere linke $(n-1) \times (n-1)$ Untermatrix. Nach Induktionsvorraussetzung können wir $a_{11}, \dots, a_{n-1\,n-1}$ so wählen, dass $\det A' \neq 0$. Nun entwicklen wir A nach der unteren Zeile und erhalten die Formel

$$\det A = (\det A') \cdot a_{nn} + C,$$

wobei C nicht von $a_{n\,n}$ abhängt. Dass heißt, wir erhalten $\det A \neq 0$, wenn wir $a_{nn} \in \{b_n, c_n\}$ so wählen, dass $a_{nn} \neq -\frac{C}{\det A'}$.

Lösung via Nullstellensatz: $\det A$ ist ein Polynom in $a_{11}, \dots, a_{nn}$, wobei es in jeder Variable Grad eins hat. Nun folgt die Aufgabe aus der folgenden Verallgemeinerung von der Aussage, dass jedes Polynom in einer Variablen vom Grad n maximal $n + 1$ Nullstellen hat.

Kombinatorischer Nullstellensatz. *Sei K ein Körper und $f \in K[X_1, \dots, X_n]$. Schreibe*

$$f = \sum_{\alpha} a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots X_n^{\alpha_n}$$

mit $a_\alpha \neq 0$. Wähle nun ein Monom $a_\alpha X_1^{\alpha_1} \cdot \ldots X_n^{\alpha_n}$ aus obiger Summe mit maximalem Gesamtgrad (d.h. $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ maximal). Dann gilt für alle Teilmengen $A_1, \dots, A_n \subset K$ mit $\# A_i \geq \alpha_i + 1$:

$$\exists (x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n : f(x_1, \dots, x_n) \neq 0.$$