Formelsammlung Mathematikwettbewerbe

Matrizen

- Determinanten
  - Laplace'scher Entwicklungssatz - Erweiterung auf Blockentwicklung
  - $\det\left(I_n + A^2\right) \geq 0$
  - Vandermonde-Matrix

$$\det\left(\left(x_i^{j-1}\right)_{i,j}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)$$

  - Cauchy-Matrix

$$\det\left(\left(\frac{1}{x_i + y_j}\right)_{i,j}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{x_1+y_1} & \frac{1}{x_1+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1+y_n} \\ \frac{1}{x_2+y_1} & \frac{1}{x_2+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2+y_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{x_n+y_1} & \frac{1}{x_n+y_2} & \cdots & \frac{1}{x_n+y_n} \end{pmatrix} = \frac{\prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)\prod\limits_{i<j}(y_i - y_j)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(x_i + y_j)}$$

  - Hilbert-Matrix

$$\det\left(\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j}\right) = \frac{\prod\limits_{i<j}(i-j)\prod\limits_{i<j}(i-j)}{\prod\limits_{i,j=1}^{n}(i+j-1)} = \frac{\left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} i!\right)^4}{\prod\limits_{i=1}^{2n-1} i!}$$

  - Frobenius-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \alpha_{n-2} \\ & & 1 & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_A = (-1)^n\left(t^n - \alpha_{n-1}t^{n-1} - \alpha_{n-2}t^{n-2} - \ldots - \alpha_0\right)$$

  - $\chi(A) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)\, t^{n-1} + ... + \det A$
  - Zirkulärmatrix:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_1 \end{pmatrix} = (-1)^{n-1}\prod_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\zeta^{jk}x_k, \quad \zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right).$$

- Spektralsätze: Für $A \in \mathfrak{B}(X)$, X ein Banachraum:
  1. Für ein Polynom $P \in \mathbb{C}[Z]$ gilt: $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$
  2. Ist A invertierbar gilt: $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A)\}$
  3. Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$: $\sigma\left(e^A\right) = e^{\sigma(A)}$, $\sigma(AB) = \sigma(BA)$
     - $\exists$ ONB aus EV $\Leftrightarrow A \cdot A^* = A^* \cdot A$ (normal), alle EV $\in \mathbb{K}$
     - A hermitesch $\Leftrightarrow \exists$ ONB aus EV, alle EW $\in \mathbb{R}$

Weiters evtl. interessant sind: Für $A \in \mathfrak{B}(X)$, X ein Hilbertraum, A normal (d.h. $A^*A = AA^*$) gilt:

A positiv (d.h. $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \forall x \in X$) $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq [0, \infty)$

A selbstadjungiert (d.h. $A^* = A$) $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$

A unitär (d.h. $A^*A = id = AA^*$) $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \mathbb{S}^1$

A orthogonale Projektion (d.h. A Projektion und selbstadjungiert) $\Leftrightarrow \sigma(A) \subseteq \{0, 1\}$

- Darstellungssätze
  - f linear: $M_B(f), M_C(f) = T_C^B M_B(f) T_B^C$
  - f bilinear: $M_B(f), M_C(f) = \left(T_B^C\right)^T M_B(f) T_B^C$
  - Polarisierung (f sym. Bilin.form)
    * $Q : v \mapsto f(v,v) \quad \Rightarrow \quad f(v,w) = \frac{1}{2}\hat{Q}(v,w) := \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$
    * Parallelogrammgleichung: $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$
    * $\langle v,w\rangle := \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right)$
  - Singulärwertzerlegung

    Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann $\exists U \in U_m$, $V \in U_n$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$ mit $\sigma_i > 0$, $r = \text{Rang}A$.

    Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U \in O_m$, $V \in O_n$ und $A = U\Sigma V^*$.
- Matrixexponentialfunktion $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$
  - $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
  - $\exp(A)^T = \exp\left(A^T\right)$
  - $\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$
  - $\exp(\operatorname{diag}(a_i)) = \operatorname{diag}(\exp(a_i))$
  - $AB - BA = 0 \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\cdot\exp(B)$
  - $S \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \exp\left(SAS^{-1}\right) = S\exp(A)S^{-1}$

Additionstheoreme

- Summe innen
  - $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
  - $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$
  - $\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
  - $\cot(x+y) = \frac{\pm\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot x \pm \cot(y)}$
- Doppelwinkel
  - $\sin(2x) = 2\sin x\cos x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$
  - $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
- Halbwinkel
  - $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
  - $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
  - $\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
  - $\cot\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{1+\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1-\cos x}$
- Summe außen
  - $\sin x \pm \sin y = 2\,{}^{\sin}_{\cos}\frac{x+y}{2}\,{}^{\cos}_{\sin}\frac{x-y}{2}$
  - $\cos x \pm \cos y = 2\,{}^{\cos}_{\sin}\frac{x+y}{2}\,{}^{\cos}_{\sin} \pm \frac{x-y}{2}$
  - $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$
  - $\cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y}$

- Arcusfunktionen (vgl. innere Summenformeln)
  - $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right), \quad xy \leq 0 \vee x^2+y^2 \leq 1$
  - $\arccos x + \arccos y = \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right), \quad x+y \geq 0$
  - $\arctan(x) \pm \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right), \quad xy < 1$
- Produkte
  - $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big)$
  - $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\Big)$
  - $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\Big)$
- Spezielle Werte

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Hyperbolische Funktionen

- innere Summen
  - $\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\cosh(y)$
  - $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$
  - $\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$
  - $\coth(x \pm y) = \frac{1 \pm \coth x \coth y}{\coth x \pm \coth y}$
- äußere Summen
  - $\sinh x \pm \sinh y = 2\sinh\frac{x \pm y}{2}\cosh\frac{x \mp y}{2}$
  - $\cosh x \pm \cosh y = 2{\cosh \atop \sinh}\frac{x+y}{2}{\cosh \atop \sinh}\frac{x-y}{2}$
  - $\tanh x \pm \tanh y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh x \cosh y}$
  - $\coth x \pm \coth y = \frac{\sinh(x \pm y)}{\sinh x \sinh y}$
- Satz von Moivre
  - $(\cosh x \pm \sinh)^n = \cosh nx \pm \sinh nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Produkte
  - $\sinh x \sinh y = \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\right)$
  - $\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\left(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\right)$
  - $\sinh x \cosh y = \frac{1}{2}\left(\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\right)$

Zusammenhang

- $\sinh ix = i\sin x, \qquad \sinh x = -i\sin ix$
- $\cosh ix = \cos x, \qquad \cosh x = \cos ix$

Differentiation/Integration

- Klassische Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Reihe T_f	D_{T_f}
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{C}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{C}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln\cos x$	-	-
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln\sin x$	$\pi\cot\pi x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{x+n}$	$\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{x^{2n+1}}{4^n(2n+1)}$	$\lvert x\rvert \le 1$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{4^k(2k+1)}$	$\lvert x\rvert \le 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$	$\lvert x\rvert \le 1, x \neq \pm i$
$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x\operatorname{arccot} x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$	$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$\lvert x\rvert \le 1, x \neq \pm i$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{C}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{C}$
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\ln\cosh x$	$\operatorname{sgn} x\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k 2e^{-2k\lvert x\rvert}\right]$	$\mathbb{C}$
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	$\ln\sinh x$	$\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{k^2\pi^2+x^2}$	$\mathbb{C}$
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x\operatorname{arsinh} x - \sqrt{x^2+1}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	-
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x\operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1}$	$\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$	-
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, x<1$	$x\operatorname{artanh} x + \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$\mathbb{C}$
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, x>1$	$x\operatorname{arcoth} x + \frac{1}{2}\ln\left(x^2-1\right)$	$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{-2k+1}}{2k+1}$	$\mathbb{C}$
e^x	e^x	e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{C}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$-x + x\ln x$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$	$(0,2]$
x^x	$x^x\ln x + x^x$	-	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$	$\mathbb{R}_0^+$

  - $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1/n} = \ln x.$
  - **Gamma-Funktion**

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} x > 0.$$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{\prod_{k=0}^{n} z+k} \quad \forall x \notin \mathbb{Z}_0^-$$

$$1/\Gamma(x) = x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{-x\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} \quad \forall x \notin \mathbb{Z}_0^-$$

$$= x\cdot e^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right), \quad \gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right)$$

    * Es gilt: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(1) = 0 \rightsquigarrow \Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.
    * Stirling-Formel: $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi/x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\mu(x)}, \quad \mu(x) \in \left(0, \frac{1}{12x}\right)$

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n, \quad n\to\infty.$$

    * Euler: $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$
  - Volumen der Einheitskugel: $Vol_n(B_1^{(n)}(0)) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$
  - Betafunktion: $B(x,y) := \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}ds$ für $x, y > 0$. Es gilt: $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

- Funktionengleichungen:

		Gleichung	Lösung
Cauchy:	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:$	$f(x+y) = f(x)+f(y)$	cx
	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:$	$f(xy) = f(x)f(y)$	$\lvert x\rvert^c, \operatorname{sgn} x\,\lvert x\rvert^c, 0$
	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:$	$f(x+y) = f(x)f(y)$	e^{cx}
	$f:\mathbb{R}^{\pm}\to\mathbb{R}:$	$f(xy) = f(x)+f(y)$	$c\ln\lvert x\rvert$
Jensen:	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:$	$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$	$cx+a$

Ohne weitere Annahmen gelten die Lösungen jeweils für rationale Werte, mit Stetigkeit, Monotonie oder Beschränktheit auf $[0,d]$ überall.

- Anwendungen der Differentiation
  - Ungleichungen (in einer Variablen) durch Kurvendiskussion
  - $\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}A'(t)\det(A(t))\right)$
  - L'Hospital: $g(x) \neq 0$ auf offenem Int. $I \ni x_0$, f, g diffbar auf $I \setminus \{x_0\}$,
    $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}|g(x)| \in \{0,\infty\}$, $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert
    $$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$
- Integration
  - Partielle Integration
    $$\int F(x)\,g(x)\,dx = F(x)\,G(x) - \int f(x)\,G(x)\,dx$$
    * Abräumen: Produkte aus Polynomen und trigonometrischen, hyperbolischen oder Exponential-Funktionen
    * "Phönix": Produkte aus trigonometrischen, hyperbolischen oder Exponential-Funktionen
    * Faktor 1: ln
  - Logarithmische Ableitung
    $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$$
  - Substitution und Transformation
    * Substitution
      $$\int f(u(x))\,u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$
      Trigonometrische Polynome: $t = \tan\frac{x}{2}$,
      Weiters $t = x \pm \frac{1}{x}$.
    * Transformationsformel von Jacobi: $\varphi : G \to H$ $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus, $f : H \to [0,\infty]$ messbar
      $$\Rightarrow \int_H f(y)\,dy = \int_G f(\varphi(x))\,|\det D\varphi(x)|\,dx.$$
      Polar- /Zylinder- /Kugelkoordinaten(r,ϕ,θ): $|\det D\varphi| = r/r/r^2\sin\theta$
  - Stammfunktionen rationaler Funktionen - Partialbruchzerlegung

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{x-a}$	$\ln\|x-a\|$
$\frac{1}{(x-a)^k}$	$\frac{1}{(1-k)(x-a^{k-1})}$
$\frac{2(x-\beta)}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\ (\gamma>0)$	$\ln\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]$
$\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}$	$\frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)$
$\frac{2(x-\beta)}{\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^k}$	$\frac{1}{(1-k)\left[(x-\beta)^2+\gamma^2\right]^{k-1}}$

  - Integralwerte
    $$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(Gauß'sches Integral)}$$
    $$\int_0^\infty \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left(x^2\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{(Fresnel'sches Integral)}$$
    $$\int_0^\infty \left(ve^{-v}\right)^n dv = \frac{n!}{n^{n+1}}$$
  - Vertauschungen
    * Satz - Tonelli/Fubini: $(S',\mathcal{A}',\mu)$, $(S'',\mathcal{A}'',\nu)$ σ-endliche Maßräume, $f : S'\times S'' \to [0,\infty]$ messbar oder $f : S'\times S'' \to [-\infty,\infty]$ produktmessbar,
      $$\Rightarrow \int\left(\int f(x,y)\,\nu(dy)\right)\mu(dx) = \int\left(\int f(x,y)\,\mu(dx)\right)\nu(dy).$$

    * Vertauschung von Integration und Reihenbildung: $f(n,x) \geq 0$ oder produktmessbar

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f(n,x)\ dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f(n,x)\ dx.$$

  - Oft sinnvoll, Funktionen in den Grenzen zu betrachten ($\int_0^t f(x)\ dx$ statt $\int_0^1 f(x)\ dx$).
  - Faserung in Kugelschalen: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt: f ist für fast alle $r \in (0,\infty)$ über $\partial B_r^{(n)}(0)$ integrierbar und es gilt:
    $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_r^{(n)}(0)} f(x)dS(x) = \int_0^\infty \int_{\partial B_1^{(n)}(0)} f(ry)dS(x)r^{n-1}dr \underset{(1)}{=} Vol_n(B_1^{(n)}(0)) \int_0^\infty \phi(r)r^{n-1}dr$
    (1) gilt nur für radialsymmetrische f, d.h. $f(x) = \phi(|x|)$
  - Funktionsgraphen: $U \subseteq \mathbb{R}^n$offen, $h \in \mathfrak{C}^1(U,\mathbb{R}^n), M :=$ Graph(h). Dann ist M eine $n-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit mit innerer Karte $\phi : x' \mapsto (x', h(x'))$ und für integrierbares $f : M \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_M f(x)dx = \int_U f(x', h(x'))\sqrt{1 + ||Dh(x')||^2}dx'$$

  - Gaußscher Integralsatz: $U \subseteq \mathbb{R}^n$offen, $\Omega \subseteq U$ kompakte Teilmenge mit (stückweise) glattem Rand und äußerem Normalenfeld ν. Für $f \in \mathfrak{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$gilt:

$$\int_\Omega \mathrm{div} f(x)dx = \int_{\partial\Omega} \langle f(x), \nu(x)\rangle dS(x)$$

  - Stokesscher Integralsatz: $U \subseteq \mathbb{R}^3$offen, $M \subseteq U$ eine durch das Normalenfeld ν orientierte zweidim. UMFK und $\Omega \subseteq M$ kompakt mit glattem Rand. ∂M trage die induzierte Orientierung und die dadurch induzierte Orientierung auf$T_p\partial\Omega, p \in \partial\Omega$sei durch die Tangentialeinheitsvektoren $t(p)$ gegeben. Für $f \in \mathfrak{C}^1(U,\mathbb{R}^3)$:

$$\int_\Omega \langle \mathrm{rot} f(x), \nu(x)\rangle dS(x) = \int_{\partial\Omega} \langle f(x), t(x)\rangle dS(x)$$

  - Residuensatz:
    S diskret in U offen, $f \in H(U \backslash S)$. $\Rightarrow \forall\Gamma$ nullhomolger Zyklus in U, $S \cap \Gamma = \emptyset$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\ dz = \sum_{z\in S\cap \mathrm{Int}\,\Gamma} \operatorname*{ind}_\Gamma(z) \operatorname*{res}_z f.$$

    * $\mathrm{ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$. (Benutze Vorfahrtsregel)
    * f holomorph in $B_\rho(z_0)$, z_0 Polstelle. Laurentreihe: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(z_0)} f(z)\ dz = a_{-1}.$$

  - Cauchy-Integralformel: $f \in H(U)$. $f^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta$.

Polynome

- wichtige Zerlegungen:
  $a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i-1}$
  n gerade: $a^n - b^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^{n-1-i}b^i = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... - b^{n-1}\right)$
  n ungerade: $a^n + b^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a^{n-1-i}b^i = (a+b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + b^{n-1}\right)$
  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
  $a^4 - b^4 = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$
  $a^5 - b^5 = (a-b)\left(a^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}ab + b^2\right)\left(a^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}ab + b^2\right)$
  $a^6 - b^6 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
  $a^4 + b^4 = \left(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2\right)\left(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2\right)$
  $a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)\left(a^2 + \sqrt{3}ab + b^2\right)\left(a^2 - \sqrt{3}ab + b^2\right)$

- Produkt und Summenformeln
  - $\prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-x^{2n-1}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n)$, $\quad x \in (-1,1)$
    $\prod_{k=0}^{n} \left(1+x^{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} x^k \xrightarrow[n\to\infty]{|x|\leq 1} \frac{1}{1-x}$
  - $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
    $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n}{6}\left(1+3n+2n^2\right)$
    $\sum_{k=0}^{n} k^m = \left|\left\{x \in [n+1]^{m+1} \mid x_{m+1} > x_j \forall j \in [m]\right\}\right|$
  - $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 (ab-cd)^2$
  - **Mittag-Leffler.** $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$, $|z_0| \leq |z_1| \leq ... \leq |z_n| \to \infty$, h_n endl. HT.
    $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ mit HT h_n in z_n, sonst holomorph.
  - **Weierstraß.** $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}, |z_0| \leq |z_1| \leq ... \leq |z_n| \to \infty, \{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{N}_0$
    $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit genau den Nst z_n mit Vfh. ν_n.
  - $\sin \pi z = \pi z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)$, $\quad \cos \pi z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{4z^2}{(2k-1)^2}\right)$

- elementarsymmetrische Funktionen
  Polynom mit NSTen $x_1,...,x_n$: $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sigma_i x^i$
  Sei $s_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$ dann gelten:
  $s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$
  $s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$
  $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 - 4\sigma_4$

- Irreduzibilität
  - $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sei primitiv und irreduzibel. Dann ist p irreduzibel über $\mathbb{Q}$.
  - **Eisenstein**: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $p|a_k \forall k = 0,1,...,n-1$, $p \nmid a_n, p^2 \nmid a_0 \Rightarrow p$ irreduzibel über $\mathbb{Z}$.
  - **Reduktionssatz**: R,S Integritätsbereiche, $\phi : R \to S$ Homomorphismus mit $\phi(1_R) = 1_S$ und $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ und $\overline{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \phi(a_i)x^i$ mit $\phi(a_n) \neq 0$. Ist das reduzierte Polynom kein Produkt zweier Polynome aus $S[x]\backslash S \Rightarrow p$ kein Produkt zweier Polynome aus $R[x]\backslash R$.
  - **Satz von Luca**: Die Nullstellen der Ableitung eines Polynoms liegen in der konvexen Hülle der NSTen des Polynoms.
  - **Decartsche Zeichenregel**: Die Anzahl aller positiven Nullstellen eines reellen Polynoms ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizientenfolge oder um eine gerade natürliche Zahl kleiner (Achtung: Jede NSTe wird mit Vielfachheit gezählt).

- Polynome 3. Grades:
  Mittels Substitution $x = y - \frac{b}{3a}$ wird die allgem. kub. Gl. $ax^3+bx^2+cx+d = 0$ zu $y^3+3py+2q = 0$
  Seien dann $u = \sqrt[3]{-q+\sqrt{p^3+q^3}}$und $v = \sqrt[3]{-q-\sqrt{p^3+q^3}}$. Dann sind die Lsgen der Gl.
  $x_1 = u+v-\frac{b}{3a}$, $x_2 = -\frac{u+v}{2} + i\frac{u-v}{2}\sqrt{3} - \frac{b}{3a}$, $x_2 = -\frac{u+v}{2} - i\frac{u-v}{2}\sqrt{3} - \frac{b}{3a}$

Folgen und Reihen

- Lineare Rekursionen $x_n = \sum_{i=1}^{k} a_i x_{n-i} \quad n \geq k$

  Dann ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eind. bestimmt durch $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ und $\lambda^k - \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^{k-i} = 0$ heißt charakteristische Gleichung mit NSTen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

  Sind alle diese Lösungen verschieden, so gilt: $x_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_i^n$ wobei die α_i aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.

  Hat die char. Gleichung die versch. Lsgen $\lambda_1, ..., \lambda_t$ mit jew. Vielfachheiten $m_1, ..., m_t$, so gilt:
  $x_n = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=0}^{m_t-1} \beta_{ij} n^j \lambda_i^n$, wobei die β_{ij} aus den Anfangsbed. best. werden müssen.

- **Cesaro-Stolz**: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ wobei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiv, monoton und unbeschränkt sei und es existiere $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = L$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ existiert und $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

- Verdichtungssatz: $(a_n)_n, a_n \geq 0$ monoton fallend $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat selbes Konvergenzverhalten wie $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

- **Satz von Abel**: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}$ konvergent, dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gleichmäßig auf $[0,1]$ und stellt damit eine stetige Funktion dar.

Ungleichungen

- Basisungleichungen für positive Reelle Zahlen $a, b, c, x, x_i > 0$:

Ungleichung		Gleichheit	
$a+1 \geq 2\sqrt{a}$		$a=1$	
$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$	$x + \frac{1}{x} \geq 2$	$a=b$	$x=1$
$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4,$	$(x_1 + ...x_n)\left(\frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2$	$a=b$	$x_i = x_j \;\; \forall i,j$
$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$		$a=b=c$	
$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$		$ad=bc$	
$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geq \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$		$a=b$	

- **Mittelungleichungen**: (im Folgenden immer $x_i, \omega_i \in \mathbb{R}^+, \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i, x = (x_i)_{i\in[n]}$)

Mittel	gewichtet	α-Mittel
$HM(x) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$	$gHM(x) = \frac{\omega}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{x_i}}$	$\alpha = -1$
$GM(x) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i}$	$gGM(x) = \sqrt[\omega]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\omega_i}}$	$\alpha = 0$
$AM(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$gAM(x) = \frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i$	$\alpha = 1$
$QM(x) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	$gQM(x) = \sqrt{\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^2}$	$\alpha = 2$
$m_\alpha(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	$gm_\alpha(x) = \left(\frac{1}{\omega}\sum_{i=1}^{n} \omega_i x_i^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
$m_\infty(x) = \max(x)$	$gm_\infty(x) = \max(x)$	$\alpha = \infty$
$gm_{-\infty} = \min(x)$	$gm_{-\infty}(x) = \min(x)$	$\alpha = -\infty$

$$\max(x) \geq QM(x) \geq AM(x) \geq GM(x) \geq HM(x) \geq \min(x) \qquad \text{(QM-AM-GM-HM)}$$
$$m_\alpha(x) \leq m_\beta(x) \quad \forall \alpha \leq \beta \qquad (\alpha\text{-Mittel})$$
$$\max(x) \geq gQM(x) \geq gAM(x) \geq gGM(x) \geq gHM(x) \geq \min(x) \qquad \text{(gew. QM-AM-GM-HM)}$$
$$gm_\alpha(x) \leq gm_\beta(x) \quad \forall \alpha \leq \beta \qquad (\text{gew. } \alpha\text{-Mittel})$$

  Gleichheit $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = ... = x_n$

  - **Akerberg-Refinement**: $\left(\frac{a_1+...+a_n}{n}\right)^n \geq a_n \left(\frac{a_1+...+a_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$.
  - $x \in \mathbb{R}^n : \quad \Sigma_k(x) := \frac{\sigma_k}{\binom{n}{k}}$
    - Newton: $\forall x \in \mathbb{R}^n : \quad \Sigma_{k-1}(x)\,\Sigma_{k+1}(x) \leq \Sigma_k^2(x) \quad \forall k \in [n-1]$.
    - Maclaurin: $\forall x \in \mathbb{R}_+^n \quad \Sigma_k^{\frac{1}{k}}(x) \leq \Sigma_{k-1}^{\frac{1}{k-1}}(x) \quad \forall k \in [n]$.

- Dreiecksungleichungen: $|x-y| \geq ||x|-|y||, \qquad (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) > 0$

- Bernoulli: $\forall x \in (-1,\infty)\backslash\{0\}, \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\} :$
  $(1+x)^\alpha > (1+\alpha x) \quad \alpha < 0, \alpha > 1$
  $(1+x)^\alpha < (1+\alpha x) \quad \alpha \in (0,1)$

- Cauchy-Schwarz: Sei V innerer Produktraum $\forall x, y \in V : | < x, y > | \leq \|x\| \, \|y\|$
  Gleichheit gdw. x, y proportional
  - Folgerungen:
    $$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i b_i} \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^n a_i)(\sum_{i=1}^n b_i)}$$
    $$\frac{(\sum_{i=1}^n a_i)^2}{\sum_{i=1}^n a_i b_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i}$$
    $$\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i}(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i})^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i^2}$$
- Hölder: $\forall p_1, ..., p_k \in [1, \infty], \frac{1}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}, f_i \in L^{p_i}(S)$: $\prod_{i=1}^n f_i \in L^r(S)$ und $\|\prod_{i=1}^n f_i\|_r \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{p_i}$
- Jensen:
  f konvex auf $[a, b]. \forall x_1, ..., x_n \in [a, b], t_1, ..., t_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^n t_i = 1$: $\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^n t_i x_i)$
  f konkav auf $[a, b]. \forall x_1, ..., x_n \in [a, b], t_1, ..., t_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^n t_i = 1$: $\sum_{i=1}^n t_i f(x_i) \leq f(\sum_{i=1}^n t_i x_i)$
  Gleichheit für $x_1 = ... = x_n$ oder $t_k = 1$ oder f linear.
  μ ein W-Maß, f integrierbar und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Dann:
  $g \circ f$ existiert und $\int g \circ f \, d\mu$ existiert und $g(\int f \, d\mu) \leq \int g \circ f \, d\mu$
  Für konkaves f natürlich umgekehrt.
- Rearrangement-Inequality:
  A, B Multimengen gleicher Mächtigkeit n, $p_\pm : A \to B$ injektiv: p_+ gleichgeordnet $:\Leftrightarrow \forall a, a' \in A : a \leq a' \Leftrightarrow p_+(a) \leq p_+(a')$, p_- gegengeordnet $:\Leftrightarrow \forall a, a' \in A : a \leq a' \Leftrightarrow p_-(a) \geq p_-(a')$. Dann gilt:
  $\sum_{a \in A} ap_+(a) \geq \sum_{a \in A} ap(a) \geq \sum_{a \in A} ap_-(a)$
- Tschebyscheff-Ungleichung: $(a_n), (b_n), n = 1, ..., N$ Folgen nichtneg. Zahlen. Dann:
  $AM(a_1 b_1, ..., a_n b_n) \geq AM(a_1, ..., a_n) AM(b_1, ..., b_n)$ für $(a_n), (b_n)$ gleichgeordnet und
  $AM(a_1 b_1, ..., a_n b_n) \leq AM(a_1, ..., a_n) AM(b_1, ..., b_n)$ für $(a_n), (b_n)$ gegengeordnet.
  $\omega : [a, b] \to \mathbb{R}_0^+$ mit $\int_a^b \omega(x) dx = 1$. Dann:
  $\int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx \geq \left(\int_a^b \omega(x) f(x) dx\right) \left(\int_a^b \omega(x) g(x) dx\right)$ für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gleichsinnig monoton,
  $\int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx \leq \left(\int_a^b \omega(x) f(x) dx\right) \left(\int_a^b \omega(x) g(x) dx\right)$ für $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegensinnig monoton,
- Ungleichung von Schur: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$: $\sum_{cyc(x,y,z)} x^r (x - y)(x - z) \geq 0$
  Folgerung: $xyz \geq (x + y - z)(x + z - y)(y + z - x)$
- Majorisierung: $a = (a_1, \cdots, a_n), b = (b_1, \cdots, b_n)$ je absteigend geordnet. $a \prec b$
  $:\Leftrightarrow \forall j \in [n] : \sum_{i=1}^j a_i \leq \sum_{i=1}^j b_i$ und $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$
  $\Leftrightarrow a \in H(b)$ (symmetrische konvexe Hülle)
  $\Leftrightarrow \exists D \in \mathbb{R}^{n \times n} : a = Db$ und D ist doppelstochastisch (d.h. $d_{ij} \geq 0 \forall i, j$ und $\forall i \in [n] : \sum_{j=1}^n d_{ij} = 1$ und $\forall j \in [n] : \sum_{i=1}^n d_{ij} = 1$)
- $U \subseteq \mathbb{R}^d, f : U \to \mathbb{R}$ heißt Schur konvex (konkav) gdw. $\forall a, b \in U, a \prec b : f(a) \leq f(b)$ (bzw. $\geq$)
  - Kriterium für Schur-Konvexität: $f : (a, b)^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und symmetrisch. Dann:
    f ist Schur konvex auf $(a, b)^n$gdw. $\forall 1 \leq j < i \leq n, x \in (a, b)^n : 0 \leq (x_j - x_i)\left(\frac{\partial f(x_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i}\right)$
  - Schursche Majorisierungsungleichung:
    $\phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ konvex, $f : (a, b)^n \to \mathbb{R}, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n \phi(x_k)$. Dann ist f Schur konvex.
- Muirhead-Ungleichung: $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^+, a = (a_1, ..., a_n), b \in \mathbb{R}^n$: $[a] = \frac{1}{n!} \sum_{sym(x_1,...,x_n)} \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$, $a \succeq b$
  Dann gilt: $\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$: $[a] \geq [b] \Leftrightarrow a \succeq b$
  Gleichheit für die Fälle $a = b$ oder $x_1 = x_2 = ... = x_n$
- Young: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{R}^+, 1/p + 1/q = 1 : ab \leq a^p/p + b^q/q$
  $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$stetig, str. mon. wachsend und bij. Dann: $\forall a, b \geq 0$: $ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy$
  Gleichheit gdw. $f(a) = b$
- **Lagrange-Multiplikatoren**: $f \in \mathfrak{C}^1(U), U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $g \in \mathfrak{C}^1(U, \mathbb{R}^m), m < n$. Zu jeder Lösung x_0 des Extremalproblems zu f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, $\text{rk}(Dg(x_0)) = m$ ex. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_m)^T \in \mathbb{R}^m$ mit $\nabla f(x_0) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x_0) = 0$