1 Kombinatorik

Aufgabe 1.3. Gesucht ist die Anzahl $c(n,m)$ der Funktionen $\mathcal{P}([n]) \to [m]$ mit $f(A \cap B) = \min\{f(A), f(B)\}$.

- Solche Funktionen werden eindeutig festgelegt durch die Funktionswerte der Mengen $[n], A_i := [n] \setminus \{i\},\ \ i \in [n],\ \ f(A_i) \leq f([n])$
- $f([n]) = k \in [m]$ beliebig wählbar. $\Rightarrow f(A_i) \in [k] \rightsquigarrow k^n$ mögliche Funktionen.

$\rightsquigarrow$ Gesamtzahl: $\sum_{k=1}^{m} k^n$.

Aufgabe 1.4. Finde kombinatorisch eine geschlossene Form für $S_n := \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2$.

- Vorstellung: Unternehmen mit n Mitarbeitern. $S_n = \#$ Möglichkeiten einen Vorstand beliebiger Größe und daraus einen Vorsitzenden und einen Schriftführer (nicht notwendig verschieden) zu wählen.
- Wähle zuerst Schriftführer und Vorsitzenden, dann den restlichen Vorstand:
  - Schriftführer = Vorsitzender: $n\,|\mathcal{P}([n-1])| = n \cdot 2^{n-1}$.
  - Schriftführer $\neq$ Vorsitzender: $n(n-1)\,|\mathcal{P}([n-2])| = n(n-1) \cdot 2^{n-2}$.

Aufgabe 1.5. Wie viele Möglichkeiten gibt es eine ungerade Anzahl von Objekten aus n Objekten auszuwählen.

Aufgabe 1.6. 200 Studenten nehmen an einem Mathematikwettbewerb teil, bei dem sie 6 Aufgaben zu lösen hatten. Jedes Problem wurde von mindestens 120 Teilnehmern gelöst. Zeigen Sie, dass es zwei Teilnehmer gibt, sodass jedes Problem von mindestens einem von ihnen gelöst wurde.

Beispiel 1.7. $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

Aufgabe 1.8. $a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$, Zeige: $\exists \emptyset \neq I \subseteq [n] : n | \sum_{i \in I} a_i$

- Betrachte die Summen $s_k := \sum_{i=1}^{k} a_i, k \leq n$ und deren Restklassen.
- Falls ein $s_k \equiv 0 \mod n$, wähle $I = [k]$.
- Sonst gibt es nach dem Schubfachprinzip $k < l : s_k \equiv s_l \mod n \Rightarrow 0 \equiv_n s_l - s_k = \sum_{i=k+1}^{l} a_i$, also wähle $I = \{k+1, ..., l\}$.

Aufgabe 1.9. $n \in \mathbb{N}, S_1, ..., S_n \subseteq \mathbb{N}$. $S_1 \cup ... \cup S_n = \mathbb{N}$. Zeige: $\exists k \in [n] : \forall m \in \mathbb{N} : S_k$ enthält unendlich viele Vielfache von m.

- Widerspruchsbeweis: Angenommen: "Gegenteil" $\Rightarrow$ alle S_k enthalten nur endlich viele Vielfache von $\prod_{k=1}^{n} m_k$.

Aufgabe 1.10. Zeige: $\sum_{u=0}^{k} \binom{n+u-1}{u}\binom{n}{k-2u} = \binom{n+k-1}{k} \quad \forall 0 \leq k \leq n$.

Aufgabe 1.11. Gegeben seien n Geraden $g_1, ..., g_n$ in allgemeiner Lage (keine drei schneiden sich in einem Punkt) in der Ebene. Zeige: Wir können die Schnittpunkte der Gerade mit 3 Farben färben, ohne dass benachbarte Schnittpunkte die gleiche Farbe haben.

- Wähle eine Richtung nicht senkrecht auf einer der Geraden. Und färbe "in dieser Richtung". Jeder Knoten hat höchstens 2 Vorgänger und kann daher gefärbt werden.

Aufgabe 1.12. $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Zeige: $12 | (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(b-d)(a-c) =: A$

- Restklassen mod 3: Mindestens zwei haben gleiche Restklasse, also teilt 3 ihre Differenz.
- Restklassen mod 2:
  - 3 gerade: O.B.d.A. $a, b, c \Rightarrow$ paarweise Differenzen gerade. $\Rightarrow 4|A$.

- – 3 ungerade: analog.
- – 2 gerade, 2 ungerade: Differenz der Geraden/Ungeraden ist gerade $\Rightarrow 4|A$.

$\Rightarrow\ 12 = 3 \cdot 4|A$.

Aufgabe 1.13. Betrachte ein Straßensystem in dem sich an jeder Kreuzung genau drei Straßen treffen. Beginnend an einer Kreuzung A gehen wir abwechselnd nach links und rechts. Zeige: A wird wieder erreicht.

Aufgabe 1.14. Bestimme die Anzahl der 4-Tupel $(a, b, c, d) \in [n+1]^n$ mit $d > \max\{a, b, c\}$ auf zwei verschiedene Weisen.

Aufgabe 1.15 (Fortsetzung zu 1.8)**.**

- Gilt die Aussage noch für $a_1, ..., a_{n-1}$? (Beweis)
- Gilt die Aussage für $a_1, ..., a_{n-1}$ nicht alle mit gleichem Rest $\mod n$?