Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. F. Schmiedl

Wiederholungskurs: Station "Korrigieren"

Aufgabe A (Trunkierte Matroide) [Punkte: 2+3]
Sei $\mathcal{M} := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid.

a) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist durch $\mathcal{M}_k := (E, \mathcal{I}_k)$ mit

$$\mathcal{I}_k := \{I \in \mathcal{I} : |I| \leq k\}$$

ein Matroid gegeben.

b) Sei $\mathcal{M}$ zusätzlich graphisch. Wie sehen die Kantenmengen im zugrunde liegenden Graphen aus, welche Kreise von $\mathcal{M}_k$ darstellen? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe B (Basisaxiome) [Punkte: 3+2]
Sei $\mathcal{M} := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $B \neq B' \subset E$ Basen von $\mathcal{M}$.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in B' \setminus B$ ein $y \in B \setminus B'$ existiert, so dass $(B' \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ wieder eine Basis von $\mathcal{M}$ ist.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass diese Aussage für Unabhängigkeitssysteme im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe C (Kreisaxiome) [Punkte: 2+3]
Sei $\mathcal{M} := (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise in $\mathcal{M}$.

a) Zeigen Sie: $\varnothing \notin \mathcal{C}$ und für zwei Kreise $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ gilt

$$C_1 \subset C_2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2$$

b) Zeigen Sie: Für zwei verschiedene Kreise $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ gibt es für jedes $e \in C_1 \cap C_2$ einen Kreis C_3 mit

$$C_3 \subset (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}.$$

Aufgabe D (Laminare Matroide) [Punkte: 5]
Sei E eine endliche, nichtleere Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ eine Menge von Teilmengen aus E mit

$$F_1 \subset F_2 \text{ oder } F_2 \subset F_1 \text{ oder } F_1 \cap F_2 = \varnothing$$

für alle $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$. Sei weiter $k : \mathcal{F} \to \mathbb{N}, F \mapsto k(F)$ eine Abbildung auf $\mathcal{F}$.

Zeigen Sie: Durch $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} := (E, \mathcal{I}_{\mathcal{F}})$ mit

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} := \{I \subset E : |I \cap F| \leq k(F) \text{ für alle } F \in \mathcal{F}\}$$

ist ein Matroid definiert.