Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

Hörsaal

Reihe

Platz

Note:

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
$\sum$		

Erstkorrektur (I)

Zweitkorrektur (II)

Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Algorithmische Diskrete Mathematik
WS 2014/2015 (Wiederholungstermin)

Prof. Dr. Peter Gritzmann
31. März 2015

Hinweise:

- Überprüfen Sie die Angabe: Es gibt inklusive Deckblatt und Übersichtsblatt insgesamt **11 Seiten** mit **6 Aufgaben**.
- Vergleichen Sie die Angaben mit dem Übersichtsblatt.
- Jede Aufgabe ist in dem unmittelbar anschließenden Platz zu bearbeiten. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.
- Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift. Verwenden Sie nicht die Farben Rot und Grün.
- Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten. Zum Bestehen sind voraussichtlich mindestens 17 Punkte nötig.
- Das letzte Blatt mit der Aufgabenübersicht kann zur Bearbeitung abgetrennt werden. Bei vorzeitiger Abgabe sind *alle* Blätter einschließlich des Übersichtsblattes abzugeben!
- Es sind *keinerlei* Hilfsmittel zugelassen.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von: ____________ bis: ____________

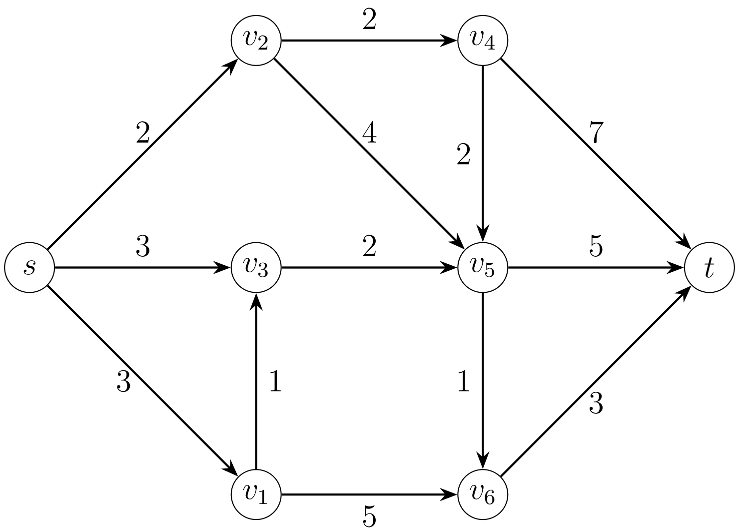
Vorzeitig abgegeben um: ____________

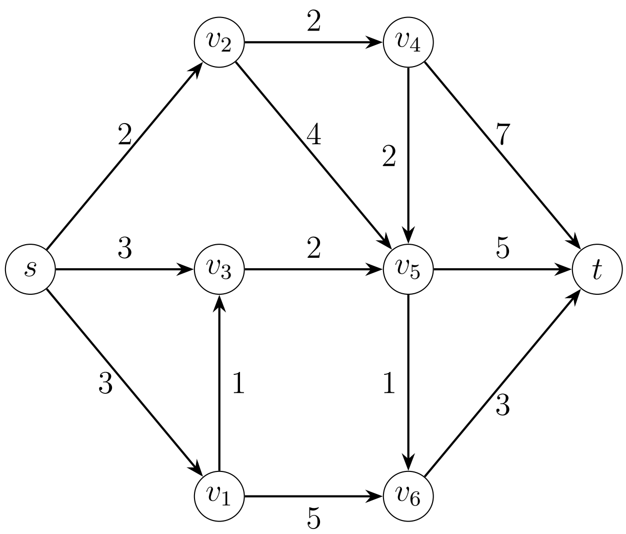
Besondere Bemerkungen:

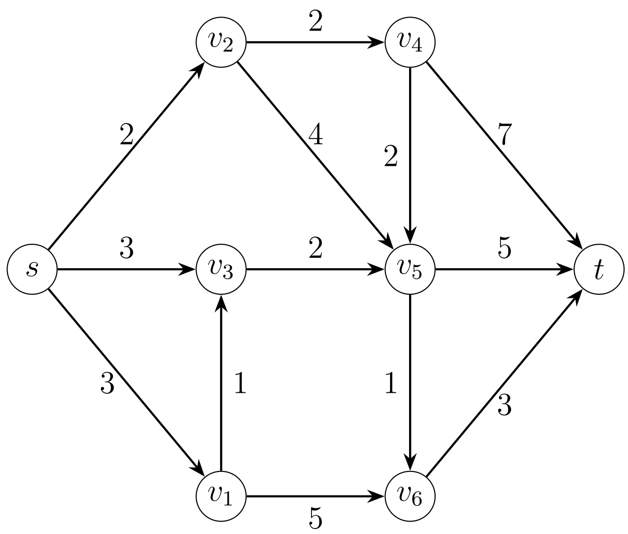
Aufgabe 1 (ca. 8 Punkte)

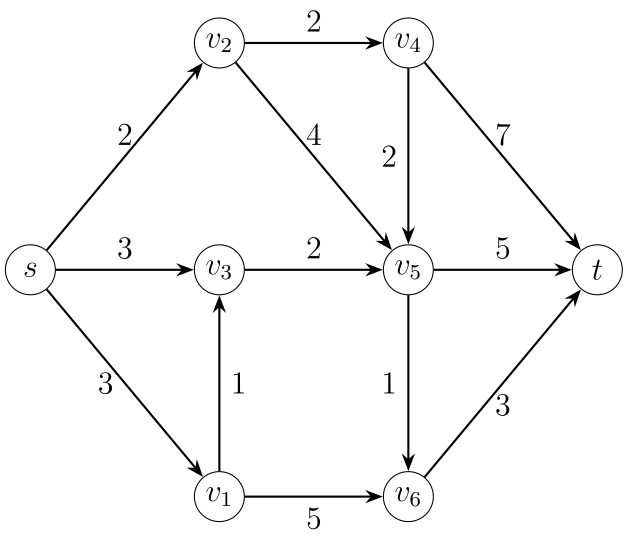
I	II

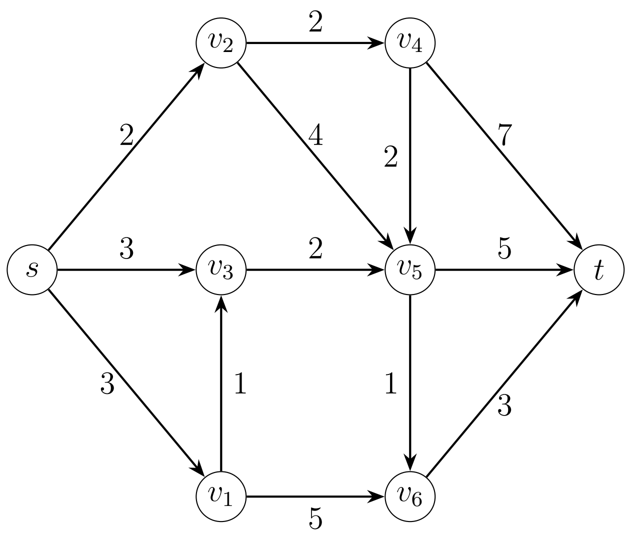
Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus aus der Vorlesung einen kürzesten Weg von s nach t im unten abgebildeten Digraphen. Stellen Sie dabei jeden Zwischenschritt nachvollziehbar dar. Tragen Sie insbesondere die Knotenlabels in jedem Schritt ein und kennzeichnen Sie jeweils die Menge S der fertig bearbeiteten Knoten. Verwenden Sie für jeden Schritt einen neuen Graphen. Geben Sie abschließend einen kürzesten s-t-Weg und dessen Länge an.

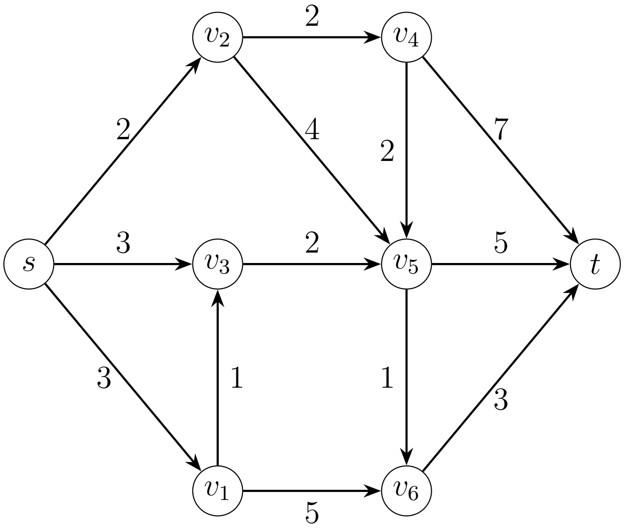


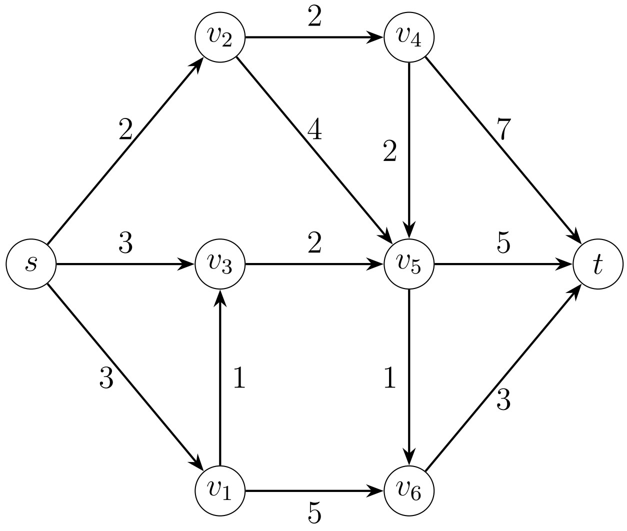


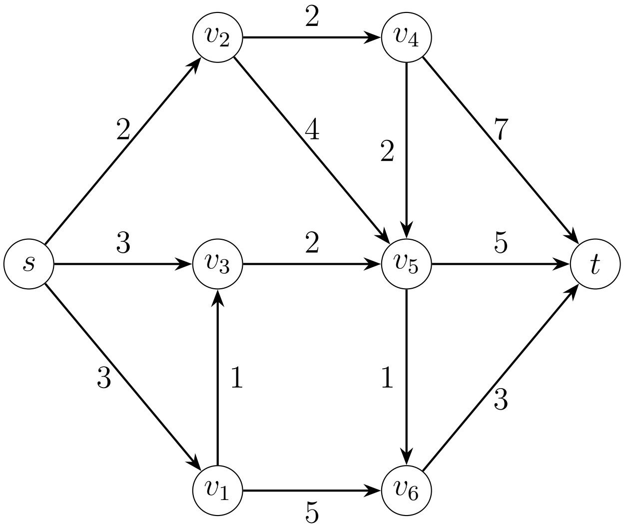


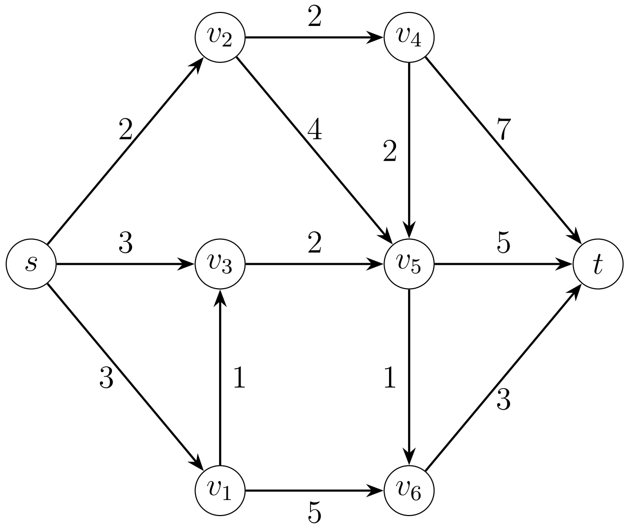


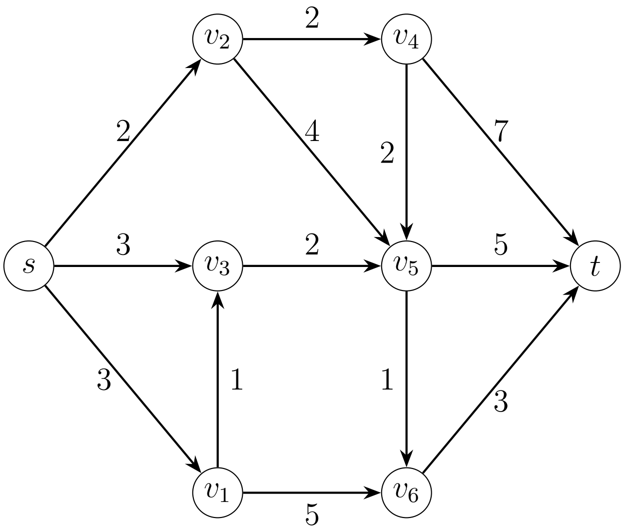


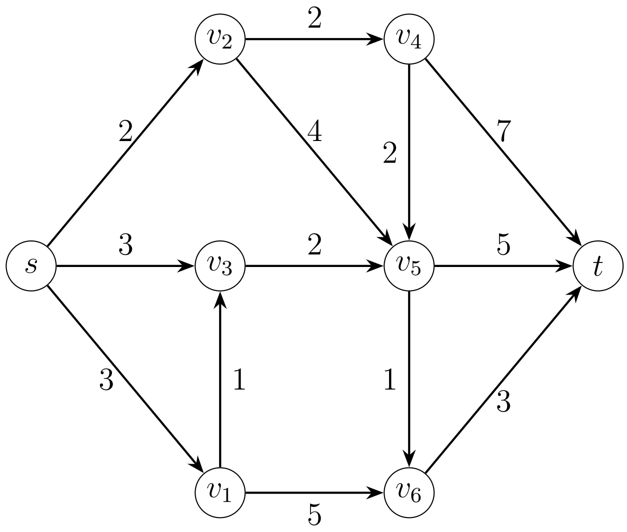

s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
t
2
2
4
7
2
3
2
5
3
1
1
3
5


s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
t
2
2
4
7
2
3
2
5
3
1
1
3
5


s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
t
2
2
4
7
2
3
2
5
3
1
1
3
5


s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
t
2
2
4
7
2
3
2
5
3
1
1
3
5


s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
t
2
2
4
7
2
3
2
5
3
1
1
3
5


s
v_1
v_2
v_3
v_4
v_5
v_6
t
2
2
4
7
2
3
2
5
3
1
1
3
5

Für einen Vektor natürlicher Zahlen $v \in \mathbb{N}^n$ und eine Indexmenge $I \subseteq [n]$ bezeichnen wir

$$v(I) := \sum_{i \in I} v_i$$

als *Wert* der Indexmenge I. Eine Indexmenge $I \subseteq [n]$ heißt *unabhängig*, wenn gilt:

$$i \in I \Rightarrow (i - 1 \notin I \wedge i + 1 \notin I)$$

Das folgende Problem bezeichnen wir als Maximale unabhängige Summe:

Eingabe: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, ein Vektor $v \in \mathbb{N}^n$.

Aufgabe: Bestimme den maximalen Wert $v(I)$ für alle unabhängigen Indexteilmengen $I \subseteq [n]$.

Beispiel: Für $n = 6$ und $v = (10, 3, 2, 5, 7, 8)^T$ ist die Lösung 23. (Die zugehörige Indexmenge wäre $I = \{1, 4, 6\}$, nach der Indexmenge ist aber nicht gefragt.)
Verwenden Sie dynamische Programmierung, um einen Algorithmus zu finden, der das Problem Maximale unabhängige Summe löst, indem Sie folgende Größe betrachten:

$$S(k) := \text{maximaler Wert einer unabhängigen Indexmenge } I \subseteq [k]$$

a) Zeigen Sie, dass für $k \geq 3$ folgende Rekursion für die $S(k)$ gilt:

$$S(k) := \max\{S(k-1), S(k-2) + v_k\}$$

---

b) Ergänzen Sie den folgenden Algorithmus so, dass er MAXIMALE UNABHÄNGIGE SUMME korrekt löst. (Sie müssen nicht beweisen, dass der Algorithmus korrekt arbeitet.)

$S(1) \leftarrow$ $\boxed{}$

$S(2) \leftarrow$ $\boxed{}$

for $k \in$ $\boxed{}$ **do**

  $S(k) \leftarrow$ $\boxed{}$

end

return $\boxed{}$

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an!

a) Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $C \subseteq E$ ein Kreis und $e \in E \setminus C$. Dann enthält $C \cup \{e\}$ mindestens zwei Kreise.

b) Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und seien $C, C' \subseteq E$ zwei Kreise mit $C \neq C'$ und $e \in C \cap C' \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge $(C \cup C') \setminus \{e\}$ einen Kreis.

c) Seien $B \neq B'$ zwei verschiedene Basen eines Matroids. Dann ist $(B \cup B') \setminus (B \cap B')$ ebenfalls eine Basis.

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei

$$\mathcal{I} := \{F \subseteq E : (V, E \setminus F) \text{ ist zusammenhängend}\}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass $U = (E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem ist.

b) Seien $A, B \in \mathcal{I}$ mit $|A| > |B|$. Zeigen Sie, dass $(V, E \setminus B)$ mindestens einen Kreis enthält.

---

c) Zeigen Sie, dass $U = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist. (*Hinweis: Sie dürfen die Aussage der vorherigen Teilaufgaben auch ohne Beweis verwenden.*)

I	II

Ein Knapsack-Problem mit 4 Gegenständen sei gegeben durch den

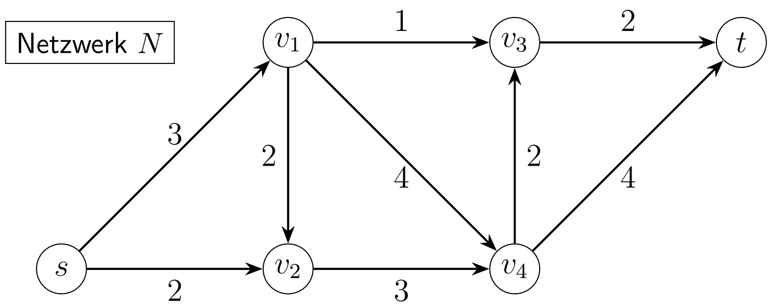
$$\text{Gewichtsvektor} \quad w = (2, 1, \; 5, 3)^T,$$
$$\text{den Nutzenvektor} \quad c = (5, 3, 11, 7)^T$$

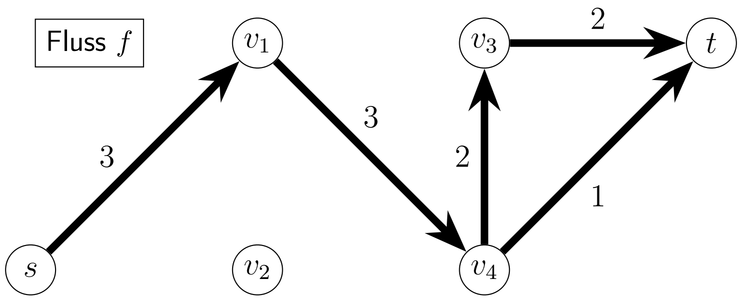
und die Gewichtsschranke $\rho = 6$, gesucht ist also eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ mit Gesamtgewicht $\sum_{i \in I} w_i \leq \rho$ und maximalem Gesamtnutzen $\sum_{i \in I} c_i$. Berechnen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung eine Optimallösung und geben Sie diese sowie den Gesamtnutzen eines optimalen Knapsack an. Stellen Sie Ihre Rechnung in einem geeigneten Schichtgraphen dar, der alle möglichen Zustände, deren Werte sowie die Stufenkostenfunktionen zeigt, so dass jeder Einzelschritt Ihrer Rechnung nachvollziehbar ist.

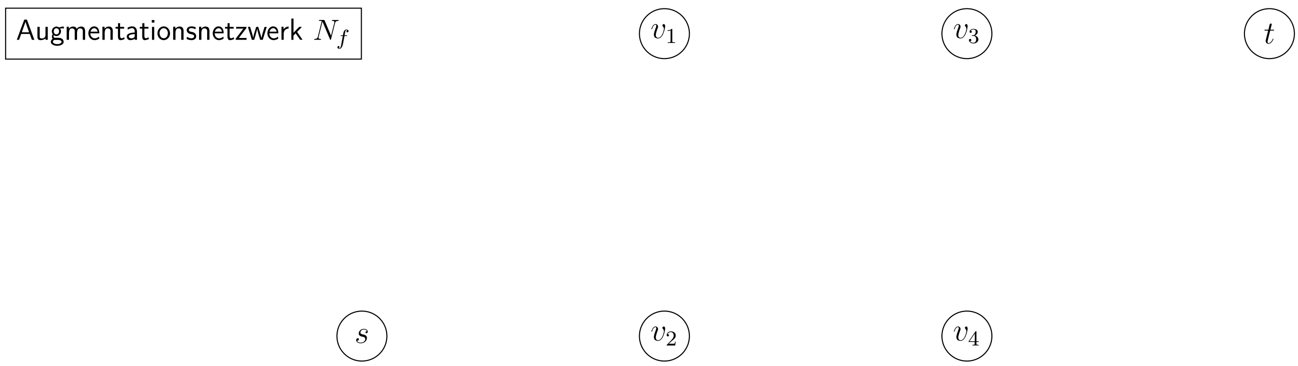
Aufgabe 6 (ca. 5 Punkte)

I	II

Sei $N = (s, t, V, E, \beta)$ das unten abgebildete Netzwerk und sei $f : E \to \mathbb{N}_0$ der darunter dargestellte s-t-Fluss. Geben Sie das Augmentationsnetzwerk N_f an.







Aufgabe 1
Berechnen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus aus der Vorlesung einen kürzesten Weg von s nach t im unten abgebildeten Digraphen. Stellen Sie dabei jeden Zwischenschritt nachvollziehbar dar. Tragen Sie insbesondere die Knotenlabels in jedem Schritt ein und kennzeichnen Sie jeweils die Menge S der fertig bearbeiteten Knoten. Verwenden Sie für jeden Schritt einen neuen Graphen. Geben Sie abschließend einen kürzesten s-t-Weg und dessen Länge an.

Aufgabe 2
Für einen Vektor natürlicher Zahlen $v \in \mathbb{N}^n$ und eine Indexmenge $I \subseteq [n]$ bezeichnen wir

$$v(I) := \sum_{i \in I} v_i$$

als *Wert* der Indexmenge I. Eine Indexmenge $I \subseteq [n]$ heißt *unabhängig*, wenn gilt:

$$i \in I \Rightarrow (i-1 \notin I \wedge i+1 \notin I)$$

Das folgende Problem bezeichnen wir als MAXIMALE UNABHÄNGIGE SUMME:

Eingabe: Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, ein Vektor $v \in \mathbb{N}^n$.

Aufgabe: Bestimme den maximalen Wert $v(I)$ für alle unabhängigen Indexteilmengen $I \subseteq [n]$.

Beispiel: Für $n = 6$ und $v = (10, 3, 2, 5, 7, 8)^T$ ist die Lösung 23. (Die zugehörige Indexmenge wäre $I = \{1, 4, 6\}$, nach der Indexmenge ist aber nicht gefragt.)
Verwenden Sie dynamische Programmierung, um einen Algorithmus zu finden, der das Problem MAXIMALE UNABHÄNGIGE SUMME löst, indem Sie folgende Größe betrachten:

$$S(k) := \text{maximaler Wert einer unabhängigen Indexmenge } I \subseteq [k]$$

a) Zeigen Sie, dass für $k \geq 3$ folgende Rekursion für die $S(k)$ gilt:

$$S(k) := \max\{S(k-1), S(k-2) + v_k\}$$

b) Ergänzen Sie den folgenden Algorithmus so, dass er MAXIMALE UNABHÄNGIGE SUMME korrekt löst. (Sie müssen nicht beweisen, dass der Algorithmus korrekt arbeitet.)

Aufgabe 3
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an!

a) Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid, $C \subseteq E$ ein Kreis und $e \in E \setminus C$. Dann enthält $C \cup \{e\}$ mindestens zwei Kreise.

b) Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und seien $C, C' \subseteq E$ zwei Kreise mit $C \neq C'$ und $e \in C \cap C' \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge $(C \cup C') \setminus \{e\}$ einen Kreis.

c) Seien $B \neq B'$ zwei verschiedene Basen eines Matroids. Dann ist $(B \cup B') \setminus (B \cap B')$ ebenfalls eine Basis.

Aufgabe 4
Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und sei

$$\mathcal{I} := \{F \subseteq E : (V, E \setminus F) \text{ ist zusammenhängend}\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $U = (E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem ist.

b) Seien $A, B \in \mathcal{I}$ mit $|A| > |B|$. Zeigen Sie, dass $(V, E \setminus B)$ mindestens einen Kreis enthält.

c) Zeigen Sie, dass $U = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid ist. (*Hinweis: Sie dürfen die Aussage der vorherigen Teilaufgaben auch ohne Beweis verwenden.*)

Aufgabe 5
Ein Knapsack-Problem mit 4 Gegenständen sei gegeben durch den

$$\begin{aligned} &\text{Gewichtsvektor} \quad w = (2, 1, \ 5, 3)^T, \\ &\text{den Nutzenvektor} \quad c = (5, 3, 11, 7)^T \end{aligned}$$

und die Gewichtsschranke $\rho = 6$, gesucht ist also eine Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ mit Gesamtgewicht $\sum_{i \in I} w_i \leq \rho$ und maximalem Gesamtnutzen $\sum_{i \in I} c_i$. Berechnen Sie mit dem Algorithmus aus der Vorlesung eine Optimallösung und geben Sie diese sowie den Gesamtnutzen eines optimalen Knapsack an. Stellen Sie Ihre Rechnung in einem geeigneten Schichtgraphen dar, der alle möglichen Zustände, deren Werte sowie die Stufenkostenfunktionen zeigt, so dass jeder Einzelschritt Ihrer Rechnung nachvollziehbar ist.

Aufgabe 6
Sei $N = (s, t, V, E, \beta)$ das unten abgebildete Netzwerk und sei $f : E \to \mathbb{N}_0$ der darunter dargestellte s-t-Fluss. Geben Sie das Augmentationsnetzwerk N_f an.