Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

Hörsaal

Reihe

Platz

Note:

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
$\sum$		

Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Algorithmische Diskrete Mathematik
WS 2012/2013
Prof. Dr. P. Gritzmann

22. Februar 2013

Hinweise:

- Überprüfen Sie die Angabe: Es gibt (inklusive Deckblatt und Übersichtsblatt mit zwei Seiten) insgesamt **11 Seiten** mit **6 Aufgaben**.
- Vergleichen Sie die Angaben mit dem Übersichtsblatt. Die Arbeitszeit beträgt 60 Minuten.
- Jede Aufgabe ist in dem unmittelbar anschließenden Platz zu bearbeiten. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen.
- Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift. Verwenden Sie nicht die Farben Rot und Grün.
- Zum Bestehen sind voraussichtlich mindestens 17 Punkte nötig!
- Das letzte Blatt mit der Aufgabenübersicht kann zur Bearbeitung abgetrennt werden. Bei vorzeitiger Abgabe sind *alle* Blätter einschließlich des Übersichtsblattes abzugeben!
- Es sind *keinerlei* Hilfsmittel zugelassen.

Erstkorrektur (I)

Zweitkorrektur (II)

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von: ____________ bis: ____________

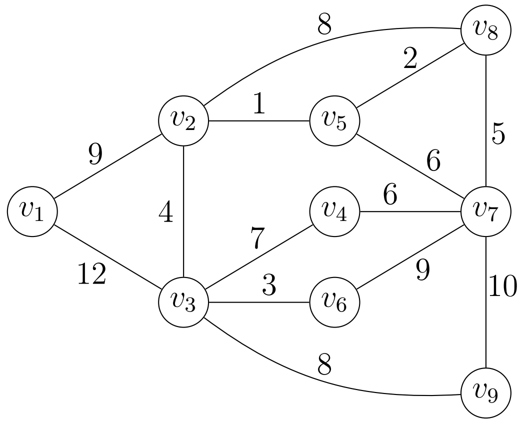
Vorzeitig abgegeben um: ____________

Besondere Bemerkungen:

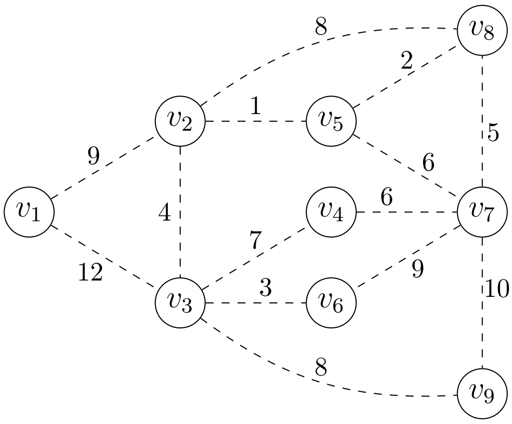
Aufgabe 1 (ca. 8 Punkte)

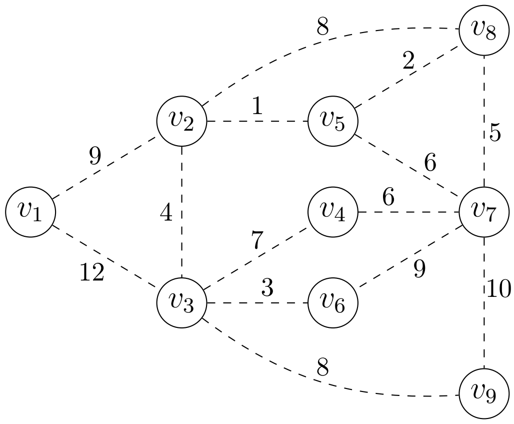
I	II

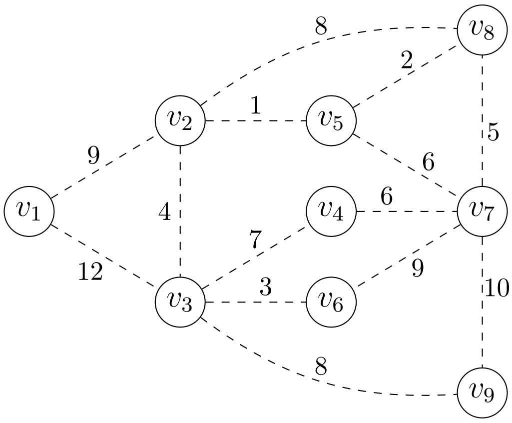
Gegeben sei der gewichtete Graph $G = (V, E; \phi)$ gemäß folgender Zeichnung:

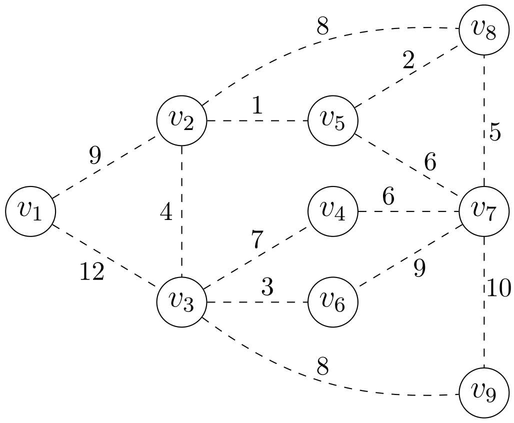


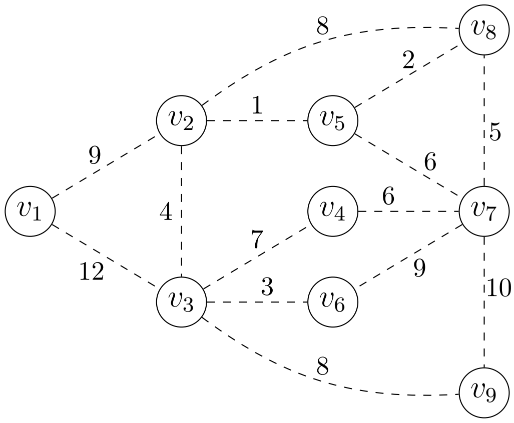
Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum. Zeichnen Sie dazu die einzelnen Schritte des Algorithmus in die unten abgebildeten Graphen ein.

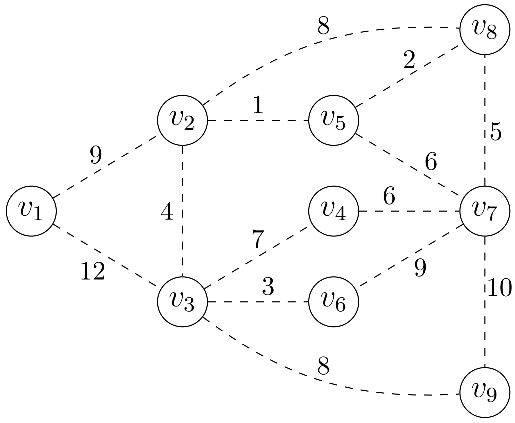


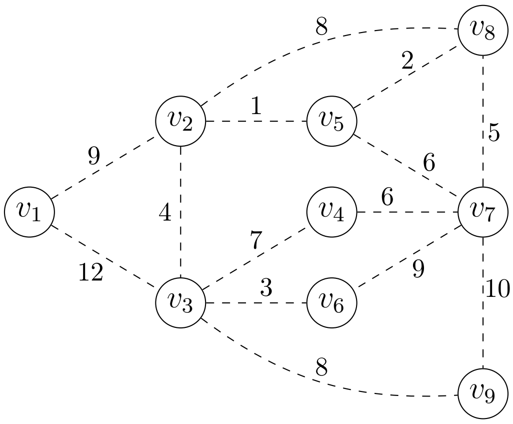


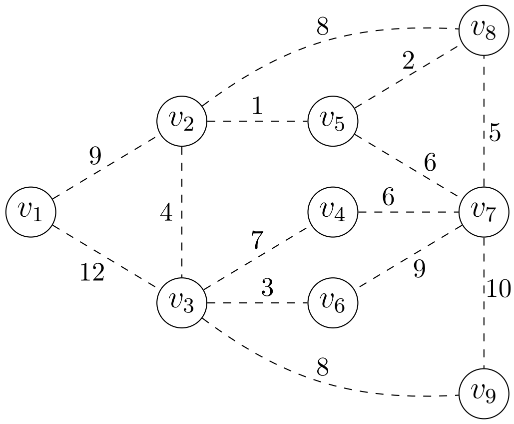





v_8
8
2
v_2
1
v_5
5
9
6
v_1
4
v_4
6
v_7
7
12
9
v_3
3
v_6
10
8
v_9


v_8
8
2
v_2
1
v_5
5
9
6
v_1
4
v_4
6
v_7
7
12
9
v_3
3
v_6
10
8
v_9


v_8
8
2
v_2
1
v_5
5
9
6
v_1
4
v_4
6
v_7
7
12
9
v_3
3
v_6
10
8
v_9


v_8
8
2
v_2
1
v_5
5
9
6
v_1
4
v_4
6
v_7
7
12
9
v_3
3
v_6
10
8
v_9

Aufgabe 2 (ca. 8 Punkte)

I	II

Gegeben sei ein Knapsack-Problem mit 4 Gegenständen durch folgende Daten:

$$\begin{aligned} \text{Gewichtsvektor:} \quad & w = (3,2,5,4)^T \\ \text{Werte:} \quad & c = (4,3,8,5)^T \\ \text{Gewichtsschranke (Kapazität):} \quad & \rho = 8 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie algorithmisch die optimale Lösung des Problems unter Angabe aller relevanten Zwischenschritte. Zeichnen Sie den zugehörigen Schichtgraphen in den karierten Bereich unten. Achten Sie darauf, dass Ihre Rechenschritte nachvollziehbar sind.

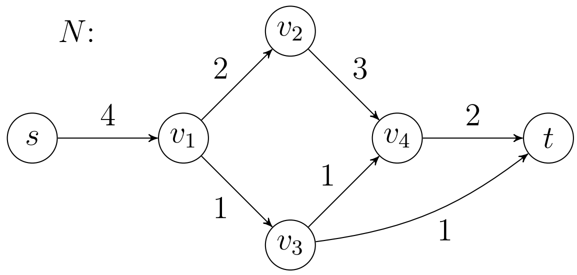
b) Geben Sie die optimale Lösung des Knapsack-Problems sowie Gewicht und Wert des optimalen Knapsack an.

Aufgabe 3 (ca. 4 Punkte)

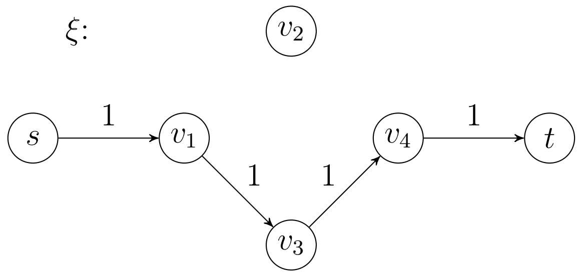
I	II

Gegeben sei folgendes Standardnetzwerk $N = (s, t, V, E, \beta)$ und folgender Fluss ξ auf N:

N:

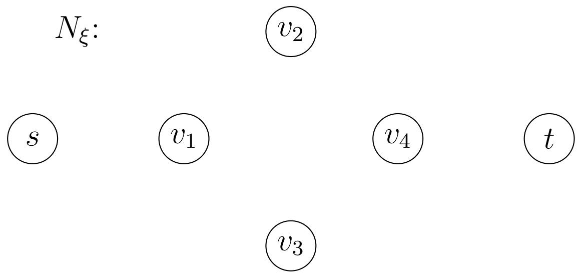


ξ:



Zeichnen Sie das Augmentationsnetzwerk N_ξ in untenstehenden Graphen ein:

N_ξ:



Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Wir bezeichnen den Ingrad eines Knotens $v \in V$ bezüglich einer Kantenmenge $E' \subset E$ mit $\deg_{\mathrm{in},E'}(v)$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt *Ingrad-Matching* in G, wenn $\deg_{\mathrm{in},M}(v) \leq 1$ für alle $v \in V$ gilt, d. h. jeder Knoten in V ist zu höchstens einer eingehenden Kante in M inzident. Sei

$$\mathcal{M} := \{M \subset E : M \text{ ist ein Ingrad-Matching in } G\} \quad \text{und} \quad U = (E, \mathcal{M}).$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Unabhängigkeitssystem ist.

b) Beweisen Sie, dass U sogar ein Matroid ist.

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Antworten an!

a) Jedes Matroid besitzt mindestens einen Kreis.

b) Ein Unabhängigkeitssystem ist genau dann ein Matroid, wenn alle Kreise gleich groß sind.

c) Es gibt einen gewichteten Digraphen $G = (V, E; \phi)$, der zwei Knoten s, $t \in V$ besitzt, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ existiert ein s-v-Weg in G.
- Es gibt einen negativen gerichteten Kreis in G.
- Die Länge aller s-t-Kantenzüge ist nach unten beschränkt.

Aufgabe 6 (ca. 8 Punkte)

I	II

Sei $G = (V, E; \phi)$ ein gewichteter Digraph mit $\phi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $s \in V$. Für einen Kantenzug $K = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ mit $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ sei

$$\varphi(K) := \min_{e \in K} \phi(e)$$

die *Bandbreite* des Kantenzugs K.

Wir betrachten das folgende Problem *maximale Bandbreite*:

Eingabe: Ein gewichteter Digraph $G = (V, E; \phi)$ mit $\phi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ein Knoten $s \in V$.

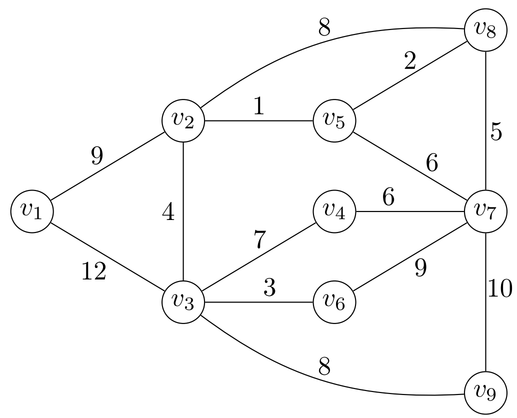
Aufgabe: Bestimme für jedes $v \in V$ die maximale Bandbreite eines s-v-Weges in G.

Ändern Sie den Dijkstra-Algorithmus so ab, dass er das Problem *maximale Bandbreite* korrekt löst. Ergänzen Sie dazu die Kästchen in folgendem Algorithmus. Sie brauchen nicht zu beweisen, dass der Algorithmus korrekt arbeitet.

$S \leftarrow \{s\}$
$\xi(s) \leftarrow \infty$
for $v \in N_{aus}(G, s)$ **do**
    $\xi(v) \leftarrow \phi\big((s, v)\big)$
for $v \in V \setminus (N_{aus}(G, s) \cup \{s\})$ **do**
    $\xi(v) \leftarrow 0$
while $N_{aus}(G, S) \neq \emptyset$ **do**
    Wähle $v^* \in$ $\boxed{}$
    for $v \in N_{aus}(G, v^*) \setminus S$ **do**
        $\xi(v) \leftarrow$ $\boxed{}$
    $S \leftarrow S \cup \{v^*\}$
return ξ

Aufgabe 1

Gegeben sei der gewichtete Graph $G = (V, E; \phi)$ gemäß folgender Zeichnung:



Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum. Zeichnen Sie dazu die einzelnen Schritte des Algorithmus in die unten abgebildeten Graphen ein.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Knapsack-Problem mit 4 Gegenständen durch folgende Daten:

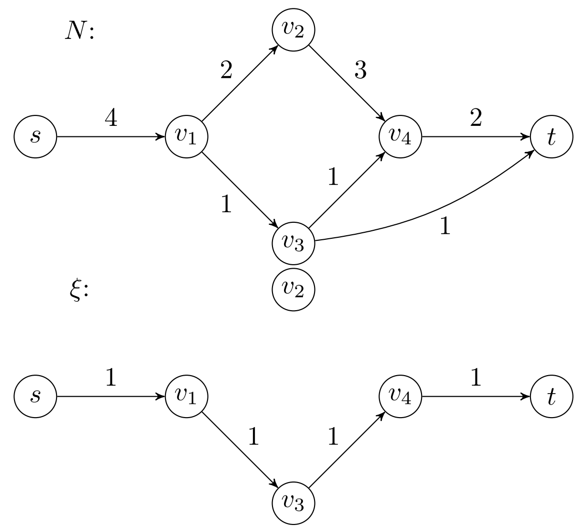
$$\begin{aligned} \text{Gewichtsvektor:} \quad & w = (3,2,5,4)^T \\ \text{Werte:} \quad & c = (4,3,8,5)^T \\ \text{Gewichtsschranke (Kapazität):} \quad & \rho = 8 \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie algorithmisch die optimale Lösung des Problems unter Angabe aller relevanten Zwischenschritte. Zeichnen Sie den zugehörigen Schichtgraphen in den karierten Bereich unten. Achten Sie darauf, dass Ihre Rechenschritte nachvollziehbar sind.

b) Geben Sie die optimale Lösung des Knapsack-Problems sowie Gewicht und Wert des optimalen Knapsack an.

Aufgabe 3

Gegeben sei folgendes Standardnetzwerk $N = (s, t, V, E, \beta)$ und folgender Fluss ξ auf N:



Zeichnen Sie das Augmentationsnetzwerk N_ξ in untenstehenden Graphen ein:

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Wir bezeichnen den Ingrad eines Knotens $v \in V$ bezüglich einer Kantenmenge $E' \subset E$ mit $\deg_{\text{in},E'}(v)$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt *Ingrad-Matching* in G, wenn $\deg_{\text{in},M}(v) \leq 1$ für alle $v \in V$ gilt, d. h. jeder Knoten in V ist zu höchstens einer eingehenden Kante in M inzident. Sei

$$\mathcal{M} := \{M \subset E : M \text{ ist ein Ingrad-Matching in } G\} \quad \text{und} \quad U = (E, \mathcal{M}).$$

a) Zeigen Sie, dass U ein Unabhängigkeitssystem ist.

b) Beweisen Sie, dass U sogar ein Matroid ist.

Aufgabe 5

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung für Ihre Antworten an!

a) Jedes Matroid besitzt mindestens einen Kreis.

b) Ein Unabhängigkeitssystem ist genau dann ein Matroid, wenn alle Kreise gleich groß sind.

c) Es gibt einen gewichteten Digraphen $G = (V, E; \phi)$, der zwei Knoten s, $t \in V$ besitzt, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Für jeden Knoten $v \in V \setminus \{s\}$ existiert ein s-v-Weg in G.
- Es gibt einen negativen gerichteten Kreis in G.
- Die Länge aller s-t-Kantenzüge ist nach unten beschränkt.

Aufgabe 6

Sei $G = (V, E; \phi)$ ein gewichteter Digraph mit $\phi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und sei $s \in V$. Für einen Kantenzug $K = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ mit $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ sei

$$\varphi(K) := \min_{e \in K} \phi(e)$$

die *Bandbreite* des Kantenzugs K.

Wir betrachten das folgende Problem *maximale Bandbreite*:

Eingabe: Ein gewichteter Digraph $G = (V, E; \phi)$ mit $\phi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, ein Knoten $s \in V$.

Aufgabe: Bestimme für jedes $v \in V$ die maximale Bandbreite eines s-v-Weges in G.

Ändern Sie den Dijkstra-Algorithmus so ab, dass er das Problem *maximale Bandbreite* korrekt löst. Ergänzen Sie dazu die Kästchen in folgendem Algorithmus. Sie brauchen nicht zu beweisen, dass der Algorithmus korrekt arbeitet.