Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. F. Schmiedl

Aufgabenblatt 1

Tutoraufgabe 1.1 (Baum-Äquivalenzen, Teil 1) [7 Punkte]
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $n := |V|, m := |E|$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) G ist ein Baum.

(2) G ist zusammenhängend und $m = n - 1$.

(3) G ist kreisfrei und $m = n - 1$.

Aufgabe 1.2 (Baum-Äquivalenzen, Teil 2) [8 Punkte]
Sei $G := (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) G ist ein Baum.

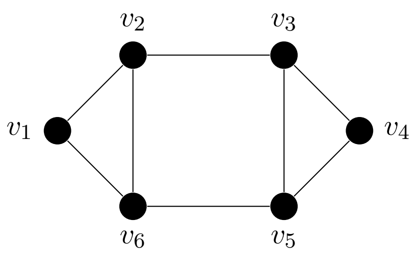
(2) Für je zwei Knoten $v,w \in V$ existiert genau ein v-w-Weg in G.

(3) G ist zusammenhängend, aber für kein $e \in E$ ist $(V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend.

(4) G ist kreisfrei, aber für alle $v,w \in V$ mit $v \neq w$ und $e := \{v, w\} \notin E$ enthält $(V, E \cup \{e\})$ einen Kreis.

Aufgabe 1.3 (Eindeutige Spannbäume) [4 Punkte]
Es sei $G = (V, E, c)$ ein zusammenhängender Graph mit einer injektiven Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeigen Sie, dass der minimal aufspannende Baum von G eindeutig ist.

Aufgabe 1.4 (Eulertouren) [5 Punkte]
Es sei $G = (V, E)$ der Graph in folgender Abbildung:



a) Wie viele (und welche) Kanten muss man zu G hinzufügen, damit es eine Eulertour gibt? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Kann man zu jedem zusammenhängenden Graphen eine endliche Anzahl an Kanten so hinzufügen, dass es eine Eulertour gibt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit kurzer Begründung an.

c) Kann man zu jedem zusammenhängenden Graphen genau einen Knoten hinzufügen, und Kanten die den neuen Knoten als Endknoten haben, so dass es eine Eulertour gibt? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel mit kurzer Begründung an.

Bitte wenden!

Aufgabe 1.5 (Existenz eines Hamilton-Kreises) [8 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n := |V| \geq 3$.

a) Seien $x, y \in V$ mit $\{x, y\} \notin E$ und $\deg_G(x) + \deg_G(y) \geq n$. Zeigen Sie: G besitzt genau dann einen Hamilton-Kreis, wenn der Graph $G' := (V, E \cup \{x, y\})$ einen Hamilton-Kreis besitzt.

b) Folgern Sie: Gilt $\deg_G(x) \geq \frac{n}{2}$ für alle $x \in V$, so besitzt G einen Hamilton-Kreis.

Die Abgabedaten von Blatt 1 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2014/ADM`.