Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. F. Schmiedl

Aufgabenblatt 2

Tutoraufgabe 2.1 [4 Punkte]

a) Sei das Unabhängigkeitssystem U definiert als

$$U = (E, \mathcal{E}) := (\{1, 2, 3\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}).$$

Ist U ein Matroid? Geben Sie die Basen und Kreise von U an!

b) Seien $U_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ und $U_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ Matroide. Zeigen oder widerlegen Sie: Das Mengensystem

$$U_1 \cup U_2 := (E_1 \cup E_2, \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2)$$

ist ein Unabhängigkeitssystem/ein Matroid.

Aufgabe 2.2 (Mengenoperationen auf Matroiden) [2+1 Punkte]

a) Seien $U_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ und $U_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ Matroide, E_1, E_2 disjunkt, d. h. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, und sei $U = (E_1 \dot\cup E_2, \mathcal{I})$ mit $\mathcal{I} := \{I \cup I' : I \in \mathcal{I}_1, I' \in \mathcal{I}_2\}$. Ist U ein Unabhängigkeitssystem/Matroid?

b) Seien $U_1 = (E_1, \mathcal{I}_1)$ und $U_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ Matroide mit $E_1 = E_2$ und $U := (E_1, \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2)$. Ist U ein Unabhängigkeitssystem/ein Matroid?

Aufgabe 2.3 (Matroidschnitt) [5 Punkte]

Sei $U = (E, \mathcal{I})$ ein Unabhängigkeitssystem über einer endlichen Menge E. Zeigen Sie: Es gibt endlich viele Matroide $M_1 = (E, \mathcal{M}_1), \ldots, M_k = (E, \mathcal{M}_k)$, so dass U sich als Schnitt dieser Matroide darstellen lässt, d. h. $\mathcal{I} = \mathcal{M}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_k$.

Hinweis: Betrachten Sie für einen Kreis C von U das Mengensystem $\mathcal{I}(C) := \{F \subset E : C \not\subseteq F\}$ und zeigen Sie, dass $(E, \mathcal{I}(C))$ ein Matroid ist.

Aufgabe 2.4 (Matching-Überdeckung) [5 Punkte]

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knoten-Teilmenge $V' \subset V$ heißt *Matching-überdeckt*, wenn es ein Matching $M \subset E$ in G gibt, so dass M alle Knoten in V' enthält. Wir definieren das Mengensystem $U = (V, \mathcal{I})$ durch

$$\mathcal{I} := \{I \subset V : I \text{ ist Matching-überdeckt bezüglich } G\}.$$

Zeigen Sie, dass U ein Matroid ist.

Aufgabe 2.5 [4 Punkte]

Sei $S := \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{I} := \{T \subset S : |T| \leq 2\}$ und $\mathcal{M} := (S, \mathcal{I})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ ein Matroid ist.

b) Gibt es einen Graphen $G = (V, S)$ mit Kantenmenge S, so dass $\mathcal{M}$ das graphische Matroid auf G ist?

Die Abgabedaten von Blatt 2 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2014/ADM`.