Technische Universität München, Zentrum Mathematik
Lehrstuhl für Angewandte Geometrie und Diskrete Mathematik

**Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)**

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. F. Schmiedl

# Aufgabenblatt 3

**Tutoraufgabe 3.1** (Rangfunktion von Matroiden) [5 Punkte]
Zeigen Sie: Es gibt ein Unabhängigkeitssytem $U$, das kein Matroid ist, aber $r_+(U) = r_-(U)$ erfüllt. Geben Sie dafür auch ein induziertes Unabhängigkeitssystem $U_A$ an, für das oberer und unterer Rang nicht gleich sind.

**Aufgabe 3.2** (Head Partition Matroid) [2+4+2 Punkte]
Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Wir bezeichnen den Ingrad eines Knotens $v \in V$ bezüglich einer Kantenmenge $E' \subset E$ mit $\deg_{\text{in},E'}(v)$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt *Ingrad-Matching* in $G$, wenn $\deg_{\text{in},M}(v) \leq 1$ für alle $v \in V$ gilt, d. h. jeder Knoten in $V$ ist zu höchstens einer eingehenden Kante in $M$ inzident. Sei

$$\mathcal{M} := \{M \subset E : M \text{ ist ein Ingrad-Matching in } G\} \quad \text{und} \quad U = (E, \mathcal{M}).$$

a) Zeigen Sie, dass $U$ ein Unabhängigkeitssystem ist.

b) Beweisen Sie, dass $U$ sogar ein Matroid ist.

c) Wie sehen die Basen und Kreise dieses Matroids aus?

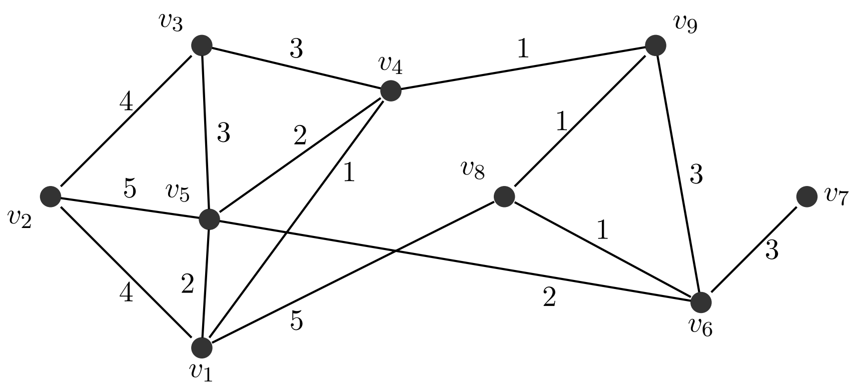
**Aufgabe 3.3** (Minimax-Spannbäume) [5 Punkte]
Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, gewichteter, zusammenhängender Graph. Wie berechnet man einen Spannbaum in $G$, dessen größte Kante möglichst klein ist?

**Aufgabe 3.4** (Greedy-Heuristik für Matchings) [5 Punkte]
Sei $G = (V, E, \phi)$ ein gewichteter Graph mit Kantengewichtung $\phi : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sei $U := (E, \mathcal{M})$ mit $\mathcal{M} := \{M \subset E : M \text{ ist ein Matching}\}$ das Unabhängigkeitssystem aus der Vorlesung. Zeigen Sie: Ist $M^* \in \mathcal{M}$ ein bezüglich $\phi$ maximales Matching und $M^g$ ein Matching, das durch einen Greedy-Algorithmus auf $U$ bestimmt wurde, so gilt:

$$\phi(M^g) \geq \frac{1}{2} \cdot \phi(M^*)$$

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 3.5** (Der Algorithmus von Kruskal) [8 Punkte]
Sei $G$ der unten angegebene, gewichtete Graph. Berechnen Sie mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimalen Spannbaum auf $G$. Geben Sie dabei auch alle relevanten Zwischenschritte an, um Ihre Rechnung nachvollziehbar zu machen.




**Aufgabe 3.6** (Korrektheit des Algorithmus von Prim/Borůvka) [5 Punkte]
Sei $G = (V, E, w)$ ein zusammenhängender Graph mit Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wir betrachten den Algorithmus von Prim/Borůvka aus der Vorlesung:

**Input**: Zusammenhängender, gewichteter Graph $G = (V, E, w)$
**Output**: Spannbaum $(V, T)$ minimalen Gewichts in $G$
Wähle einen beliebigen Knoten $w \in V$.
Setze $W \leftarrow \{w\}$ und $T \leftarrow \emptyset$.
**while** $N(G, W) \neq \emptyset$ **do**
  Bestimme eine Kante $e^* = \{v, z\} \in \operatorname{argmin}\{w(e) : e \in \delta_G(W)\}$ mit $v \in W$ und $z \in V \setminus W$.
  Setze $W \leftarrow W \cup \{z\}$ und $T \leftarrow T \cup \{e^*\}$

Sei $T = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$ die Kantenmenge, die durch den Algorithmus von Prim/Borůvka bestimmt wird. Die Kanten seien dabei in der Reihenfolge nummeriert, in der sie vom Algorithmus ausgewählt wurden.

a) Zeigen Sie: $T$ ist ein aufspannender Baum für $G$.

b) Zeigen Sie, dass $T$ ein minimaler Spannbaum für $G$ ist (ohne Verwendung von Sätzen über Matroide).

   *Hinweis: Betrachten Sie einen minimalen Spannbaum $T' = \{e'_1, \ldots, e'_{n-1}\} \subset E$, für den $e_1 = e'_1, \ldots, e_k = e'_k$ für ein möglichst hohes $k$ gilt.*