Algorithmische Diskrete Mathematik (MA 2501)

Prof. Dr. P. Gritzmann | Dr. M. Ritter | Dipl.-Math. F. Schmiedl

Aufgabenblatt 4

Tutoraufgabe 4.1 (Codierungslänge) [3 Punkte]

a) Seien $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Q}$ mit gegebenen Darstellungen. Zeigen Sie, dass für die zugehörige Darstellung von $\rho_1 \cdot \rho_2$ gilt: $\text{size}(\rho_1 \cdot \rho_2) \leq \text{size}(\rho_1) + \text{size}(\rho_2)$

b) Seien $A \in \mathbb{Z}^{m \times p}$, $B \in \mathbb{Z}^{p \times n}$. Zeigen Sie: $\text{size}(AB) \leq n \cdot \text{size}(A) + m \cdot \text{size}(B)$

Aufgabe 4.2 (Codierungslänge) [4 Punkte]

Durch den gewichteten Graphen $G = (V, E, \phi)$ mit $\phi : E \to \mathbb{N}$ sei eine Instanz des minimalen Spannbaum-Problems gegeben.

a) Definieren sie eine geeignete Darstellung für die Eingabe des Problems. Welche Codierungslänge besitzt der Input?

b) Welche Laufzeit hat der Algorithmus von Prim aus der Vorlesung in Abhängigkeit von der Codierungslänge der Eingabe? Handelt es sich um einen polynomiellen Algorithmus?

Aufgabe 4.3 (Modellierung) [1+3 Punkte]

a) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph und $\phi : E \to \mathbb{N}$ eine Kantengewichtung, weiter seien $s, t \in V$ mit $s \neq t$. Formulieren Sie das folgenden Problem als Minimierungsproblem über einem geeigneten Unabhängigkeitssystem: „Finde einen bezüglich ϕ kürzesten Weg zwischen s und t in G."

b) Modellieren Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe eines Ihnen aus der Vorlesung bekannten Problems: Sie arbeiten bei einem großen Unternehmen mit mehreren Standorten und haben die Aufgabe, die Vernetzung dieser Standorte neu zu organisieren. Dazu möchten Sie möglichst wenige Leitungen bei einem Telekommunikationsunternehmen anmieten, so dass alle Ihre Standorte (direkt oder indirekt) miteinander verbunden sind. Das verfügbare Netz ist als Graph $G = (V, E)$ gegeben, Ihre Firma betreibt an jedem Knoten in V eine Niederlassung. Für jede Leitung gibt das Telekommunikationsunternehmen eine Ausfallwahrscheinlichkeit bekannt; diese Wahrscheinlichkeiten $p : E \to (0, 1)$ sind voneinander unabhängig. Gesucht ist eine möglichst kleine Teilmenge an Leitungen, die alle Ihre Standorte verbinden. Dabei soll die Ausfallwahrscheinlichkeit des gesamten Netzes möglichst gering sein.

Aufgabe 4.4 („Streichungsvariante“ des Greedy-Algorithmus) [5 Punkte]

Sei $G = (V, E, w)$ ein gewichteter Graph mit $m = |E|$ Kanten, Gewichtsfunktion $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, und sei $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ so nummeriert, dass $w(e_1) \geq w(e_2) \geq \ldots \geq w(e_m)$. Zeigen Sie, dass der folgende „Reverse Greedy-Algorithmus“ das Minimum Spanning Tree-Problem korrekt löst.

Input: zusammenhängender Graph $G = (V, E)$, Kantengewichtung $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
Output: minimaler Spannbaum $T^g \subset E$
Setze $E_0 \leftarrow E$
for $i = 1, \ldots, m$ **do**
  if $E_{i-1} \setminus \{e_i\}$ *zusammenhängend* **then**
    $E_i \leftarrow E_{i-1} \setminus \{e_i\}$
  else
    $E_i \leftarrow E_{i-1}$
return $T^g := E_m$

Aufgabe 4.5 (k-Matroid-Schnitt) [2+5 Punkte]

Sei $k \in \mathbb{N}$, $M_1 = (E, \mathcal{I}_1), \ldots, M_k = (E, \mathcal{I}_k)$ Matroide über einer endlichen Grundmenge E und sei $M := (E, \mathcal{I})$ der Durchschnitt dieser Matroide, d. h. $\mathcal{I} := \cap_{i=1}^{k} \mathcal{I}_i$.

a) Sei $I \in \mathcal{I}$ und $e \in E$ mit $I \cup \{e\} \notin \mathcal{I}$. Zeigen Sie, dass $I \cup \{e\}$ höchstens k Kreise enthält.

b) Zeigen Sie, dass für den Rangquotienten von M gilt: $\rho(M) \geq \frac{1}{k}$.

Die Abgabedaten von Blatt 4 für Ihre Gruppe finden Sie auf der Homepage zur Vorlesung unter `http://www-m9.ma.tum.de/WS2014/ADM`.