Übungsblatt 1

Tutoraufgaben:

*__Aufgabe 1.1__ (Abschwächung der Gruppenaxiome und des Untergruppennachweises)
Es sei H eine Halbgruppe mit linksneutralem Element e. Außerdem existiere zu jedem $a \in H$ ein linksinverses Element. Zeigen Sie (schrittweise):

(a) Ein linksinverses Element ist auch rechtsinvers.

(b) Ein linksneutrales Element e ist auch rechtsneutral und damit eindeutig bestimmt.

(c) Ein linksinverses (und damit nach (a) auch rechtsinverses) b von a ist eindeutig bestimmt.

(d) Sind die Translationen l_a und r_a für alle $a \in H$ surjektiv, so ist H eine Gruppe.

(e) Es sei $U \subset H$ endlich. Dann ist: U ist Untergruppe von $H \quad \Leftrightarrow \quad ab \in U$ für alle $a, b \in U$.
(Mit anderen Worten, für endliche Teilmengen U kann beim Untergruppennachweis auf das Bilden der Inversen im Nachweis $ab^{-1} \in U$ verzichtet werden.)

*__Aufgabe 1.2__ (Nicht endlich erzeugte Gruppe)
Zeigen Sie, dass die additive Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ der rationalen Zahlen nicht endlich erzeugt ist.

Aufgabe 1.3 (Kongruenzen)
Zeigen Sie, dass für $m \in \mathbb{N}$ und $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$k \equiv l \pmod{m} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Bei Division von } k \text{ und } l \text{ durch } m \text{ bleibt der gleiche nicht negative Rest.}$$

Hausaufgaben:

Aufgabe 1.4 (Die Gruppe $\mathcal{S}_3$)
Betrachten Sie die Gruppe $(\mathcal{S}_3, \circ)$, die aus den 6 Permutationen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

besteht.

(a) Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel von $(\mathcal{S}_3, \circ)$.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Ordnung $1, 2, 3$ und 6.

Bitte wenden!

(c) Für welche Elemente $\sigma_i \in \mathcal{S}_3$ gilt $\sigma_i^6 = 1$?

Aufgabe 1.5 (Quaternionengruppe)
Gegeben seien folgende Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die von diesen vier Matrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ erzeugte Gruppe

$$Q = \mathrm{Erz}(E, I, J, K)$$

explizit an. Diese Gruppe wird üblicherweise als *Quaternionengruppe* bezeichnet.

Hinweise:

- Einige Aufgaben sind mit einem * markiert, diese sind eher schwer. Eine fehlende *-Markierung bedeutet, dass erwartet wird, dass sie die jeweilige Aufgabe selbstständig lösen können.
- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 22.10.2015.