Technische Universität München, Zentrum Mathematik

Algebra für LG (MA 2103), Winter 2015/2016

Prof. Dr. Gerd Fischer | Dr. Andreas Alpers | Matthias Lehner

Übungsblatt 2

Tutoraufgaben:

Aufgabe 2.1 (Staatsexamen, Frühjahr 2012)
Es sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Begründen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung p in G durch $p-1$ teilbar ist, d.h.

$$|\{a \in G | \mathrm{ord}(a) = p\}| = (p-1) \cdot k \quad \text{für ein } k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Mengen $M_a = \{a, a^2, ..., a^{p-1}\}$ für $a \in G$ mit $\mathrm{ord}(a) = p$.

Aufgabe 2.2 (Alternierende Gruppe)
Gegeben sei die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ sowie die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_n$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_n$ ein Normalteiler in $\mathcal{S}_n$ ist.

(b) Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G mit $\mathrm{ind}(G : H) = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist.

(c) Beantworten Sie Frage (a) unter Verwendung der in (b) bewiesenen Aussage.

Hausaufgaben:

Aufgabe 2.3 (Normalteiler von $\mathcal{S}_3$)
Betrachten Sie die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$.

(a) Bestimmen Sie zu jeder in Aufgabe 1.4 bestimmten Untergruppe $H < \mathcal{S}_3$ die jeweiligen Recht- und Linksnebenklassen.

(b) Bestimmen Sie die konjugierten Untergruppen $\sigma_2 H_2 \sigma_2^{-1}$ und $\sigma_5 H_2 \sigma_5^{-1}$, wobei $H_2 = \{\sigma_1, \sigma_4\}$ mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5$ wie in Aufgabe 1.4.

(c) Welche der in Aufgabe 1.4 bestimmten Untergruppen $H < \mathcal{S}_3$ sind Normalteiler von $\mathcal{S}_3$?

Aufgabe 2.4 (Satz von Cayley für Z_3)
Berechnen Sie explizit nach dem Satz von Cayley eine Einbettung von Z_3 in $\mathcal{S}_3$ mit Hilfe von Translationen.

Aufgabe 2.5 (Verknüpfungstafeln von Z_7)
Bestimmen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen für Z_7.

Bitte wenden!

Aufgabe 2.6 (Staatsexamen, Frühjahr 2014)
Wir betrachten die komplexen (2×2)-Matrizen

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $G = \{\pm E, \pm A, \pm B, \pm C\}$.

(a) Zeigen Sie, dass G bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

(b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von G.

(c) Welche Untergruppen sind Normalteiler von G?

Hinweise:

- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 29.10.2015.