Übungsblatt 3

Tutoraufgaben:

*__Aufgabe 3.1__ (Faktorisierungssatz)
Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$ und die Homomorphismen $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $k \mapsto k + n\mathbb{Z}$ und $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit $k \mapsto k + m\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Für welche m und n gibt es einen Homomorphismus $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit $\varphi = \overline{\varphi} \circ \rho$ und wie ist er erklärt?

*__Aufgabe 3.2__ (Klassifikation zyklischer Gruppen)
Beweisen Sie mit Hilfe des ersten Isomorphiesatzes:

(a) Jede unendliche zyklische Gruppe ist zu $\mathbb{Z}$ isomorph.

(b) Jede endliche zyklische Gruppe der Ordnung n ist zu Z_n isomorph.

Aufgabe 3.3 (Äußere direkte Produkte)
Es seien G_1 und G_2 zwei Gruppen mit neutralen Elementen e_1 bzw. e_2. Mit $\times$ sei das äußere direkte Produkt bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $G_1' := G_1 \times \{e_2\} \ \triangleleft\ G_1 \times G_2$;

(b) Die Abbildung $\varphi : G_2 \to (G_1 \times G_2)/G_1'$ mit $g_2 \mapsto (e_1, g_2)G_1'$ ist ein Isomorphismus.

Hausaufgaben:

Aufgabe 3.4 (Normalteiler)
Die *Diedergruppe* D_4 kann man als Gruppe der Symmetrien eines Quadrats mit den Ecken 1, 2, 3, 4 und damit als Untergruppe $D_4 < \mathcal{S}_4$ (der Ordnung 8) auffassen.

Welche der folgenden Aussagen gelten für die Diedergruppe $G = D_4$, welche allgemein für Gruppen G?

(a) Ist $H \triangleleft H' \triangleleft G$, dann ist $H < G$ (also H Untergruppe von G).

(b) Ist $H \triangleleft H' \triangleleft G$, dann ist $H \triangleleft G$ (also H Normalteiler von G).

Bitte wenden!

Aufgabe 3.5 (Innere direkte Produkte)
Gegeben die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ und die alternierende Gruppe $\mathcal{A}_3$. Gibt es eine Gruppe H, so dass $\mathcal{S}_3 = H \times \mathcal{A}_3$ ein inneres direktes Produkt ist?

Aufgabe 3.6 (Innere und äußere direkte Produkte)
Es sei $G := \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ mit $a^6 = e$, $G_1 := \{e, b\}$ mit $b^2 = e$ und $G_2 := \{e, c, c^2\}$ mit $c^3 = e$. Außerdem seien $H_1 := \{e, a^3\}$ und $H_2 := \{e, a^2, a^4\}$ Untegruppen von G. Zeigen Sie:

(a) G ist isomorph zu $G_1 \times G_2$ (geben Sie diesen Isomorphismus explizit an);

(b) G ist inneres direktes Produkt von H_1 und H_2;

(c) $G_1 \times \{e\}$ ist isomorph zu H_1 und $\{e\} \times G_2$ ist isomorph zu H_2.

Rechenregeln bei zyklischen Gruppen in additiver und multiplikativer Schreibweise:

$$\text{Ker } \varphi = m\mathbb{Z} \qquad \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G = \{e, a, ..., a^{m-1}\}$$

$$k \mapsto a^k$$

Das ergibt einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \ldots, (m-1) + m\mathbb{Z}\} \xrightarrow{\overline{\varphi}} G = \{e, a, ..., a^{m-1}\}$$

Die Addition $+$ wird zur Multiplikation $\cdot$

$$(k + m\mathbb{Z}) + (l + m\mathbb{Z}) = (k + l) + m\mathbb{Z} \mapsto a^k \cdot a^l = a^{k+l} = a^{l+k} = a^l \cdot a^k$$

Die Multiplikation $\cdot$ wird zur Potenzierung $*$

$$(k + m\mathbb{Z}) \cdot (l + m\mathbb{Z}) = (k \cdot l) + m\mathbb{Z} \mapsto a^k * a^l = (a^k)^l = a^{k \cdot l} = a^{l \cdot k} = a^l * a^k$$

Hinweise:

- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 05.11.2015.