



## Übungsblatt 4

### Tutoraufgaben:

#### Aufgabe 4.1 (Staatsexamen, Frühjahr 2006)

Beweisen Sie: Es sei  $(G, +)$  eine abelsche Gruppe und  $U, V$  seien Untergruppen von  $G$ . Dann gilt  $G = U \oplus V$  genau dann, wenn je zwei Nebenklassen  $U + a$  und  $V + b$  mit  $a, b \in G$  genau ein Element gemeinsam haben.

#### Aufgabe 4.2 (Festlegung von Homomorphismen in zyklischen Gruppen)

Es sei  $G := \text{Erz } a$  zyklisch,  $G'$  eine beliebige Gruppe und  $b \in G'$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $\text{ord}(G) = \infty$ , so gibt es zu jedem  $b \in G'$  einen Homomorphismus

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{mit} \quad \varphi(a) = b.$$

- (b) Ist  $\text{ord}(G) = m < \infty$ , so gibt es genau dann einen Homomorphismus

$$\varphi : G \rightarrow G' \quad \text{mit} \quad \varphi(a) = b,$$

wenn  $\text{ord}(b) \mid m$ . Insbesondere muß  $\varphi(a) = 0$  sein, falls  $G' = \mathbb{Z}$ .

#### Aufgabe 4.3 (Chinesischer Restesatz I)

Dschingis Khan möchte seine Kamele vorzeitig vererben, da er deren Gestank nicht mehr aushält. Wenn er sie gerecht an die 7 Kinder vererbt, die er in der ersten Nacht seines Rachefeldzuges gegen das Choresmische Reich gezeugt hat, so bleiben ihm aber 6 Kamele übrig. Vererbt er sie gerecht auf die 8 Geliebten die ihm in der zweiten Nacht seines Rachefeldzuges Gesellschaft leisteten, so bleiben 7 Kamele übrig. Vererbt er sie an seine 9 Lieblings-Bauchtänzerinnen die in seinem Palast zuhause auf ihn warten, bleibt 1 Kamel übrig. Die feindlichen Merkiten machen sich schon lange über Dschingis Khan lustig, weil er nicht einmal 1000 Kamele hat. Beim Sieg über Gurkhan Dschamucha soll er jedoch über 500 Kamele zum Transport von Proviant eingesetzt haben. Wieviele Kamele hat Dschingis Khan wirklich?

## Hausaufgaben:

### Aufgabe 4.4 (Nebenklassen)

Es seien  $G$  und  $G'$  Gruppen,  $\varphi : G \rightarrow G'$  ein Homomorphismus,  $a \in G$ ,  $b \in G'$  mit  $\varphi(a) = b$ .  
Zeigen Sie:  $\varphi^{-1}(b) = a \cdot \text{Ker } \varphi$ .

### Aufgabe 4.5 (Elementordnung)

Es sei  $G$  eine Gruppe,  $a \in G$  mit  $\text{ord}(a) < \infty$ , und es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

$$\text{ord}(a^n) = \frac{\text{kgV}(\text{ord}(a), n)}{n} = \frac{\text{ord}(a)}{\text{ggT}(\text{ord}(a), n)}.$$

### Aufgabe 4.6 (Staatsexamen, Teilaufgabe, Herbst 2012)

Die Anzahl der Tänzer in einem Ballsaal liegt zwischen 100 und 200. Stellt man sie in 11-er Reihen auf, so bleibt ein Tänzer allein. Stellt man sie dagegen in 5-er Reihen auf, so bleiben drei übrig. Und stellt man sie in 3-er Reihen auf, so bleiben zwei Tänzer allein. Wie viele Tänzer sind es genau?

## Hinweise:

- Homepage zur Lehrveranstaltung: <http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG>
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 12.11.2015.