Übungsblatt 5

Tutoraufgaben:

Aufgabe 5.1 (Zerlegung von endlichen abelschen Gruppen)
Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 108. Geben Sie diese

(a) als Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung

(b) und in entsprechender Elementarteilerform an.

Aufgabe 5.2 (Untergruppen endlicher abelscher Gruppen)
Es sei G eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung n. Für jeden Teiler d von n existiert eine Untergruppe $H < G$ mit $\operatorname{ord} H = d$. Beweisen Sie diese Aussage

(a) für den Fall, dass G zyklisch ist, und

(b) im allgemeinen Fall unter Benutzung von (a) und des Hauptsatzes über endliche abelsche Gruppen.

Aufgabe 5.3 (Exponenten)
Bestimmen Sie zu den folgenden Gruppen G den Exponenten:

(a) $G = Z_n$, mit $n \in \mathbb{N}$,

(b) $G = Z_m \times Z_n$, mit $m, n \in \mathbb{N}$,

(c) $G = Z_2 \times Z_2 \times Z_3$,

(d) $G = \mathcal{S}_3$,

(e) $G = \mathcal{A}_3$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5.4 (Zerlegung von endlichen abelschen Gruppen)
Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle endlichen abelschen Gruppen der Ordnung 72. Geben Sie diese

(a) als Produkt von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung

(b) und in entsprechender Elementarteilerform an.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.5 (Untergruppenverband)
Bestimmen Sie die Untergruppenverbände von Z_{24} und Z_{30}.

(Hinweis: Gemeint ist, dass alle Untergruppen von Z_{24} bzw. Z_{30} zu bestimmen und die Teilmengenbeziehungen zwischen den jeweiligen Untergruppen graphisch darzustellen sind.)

Aufgabe 5.6 (Kongruenzen)
Bestimmen Sie die letzte Ziffer (im Dezimalsystem) von 3^{2015}.

Aufgabe 5.7 (Euklidischer Algorithmus)

(a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(9628, 364)$ mit Hilfe der Primfaktorzerlegung beider Zahlen.

(b) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(9628, 364)$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus.

(c) Bestimmen Sie natürliche Zahlen x und y mit $\mathrm{ggT}(9628, 364) = 9628x + 364y$.

(d) Staatsexamen, Teilaufgabe, Herbst 2005. Beweisen oder widerlegen Sie: *Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n + 1$ und $143n + 2$ nicht teilerfremd.*

Hinweise:

- **Klausurtermine:**

  Erstklausur: Am 18.2.2016 um 9:00 Uhr in MW 1050

  Zweitklausur: Am 4.4.2016 um 9:00 Uhr in MI HS 2

  Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 19.11.2015.