Übungsblatt 6

Tutoraufgaben:

Aufgabe 6.1 (Gaußsche Zahlen)
Die Mengen

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[i] &:= \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathbb{Q}(i) &:= \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \end{aligned}$$

mit der gegebenen Addition und Multiplikation komplexer Zahlen sind Teilringe von $\mathbb{C}$. Der Ring $\mathbb{Z}[i]$ wird als Ring der *Gaußschen Zahlen* bezeichnet.

Zeigen Sie, dass:

(a) $\mathbb{Z}[i]$ tatsächlich ein Teilring von $\mathbb{C}$ ist.

(b) $\mathbb{Q}(i)$ der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}[i]$ ist.

(c) der Restklassenring $\mathbb{Z}[X]/(X^2+1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}[i]$ ist.

Aufgabe 6.2 (Polynomdivision)

(a) Zerlegen Sie $X^3 - 31X - 30 \in \mathbb{Q}[X]$ in Linearfaktoren, also in $(X-a)(X-b)(X-c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

(b) Dividieren Sie in $\mathbb{Q}[X]$ mit Rest: $6X^4 - 9X^3 + 12X^2 - 20X + 10$ durch $2X - 3$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 6.3 (Polynomdivision)
Dividieren Sie in $\mathbb{Q}[X]$ mit Rest:

(a) $2X^4 - 3X^3 - 4X^2 - 5X + 6$ durch $X^2 - 3X + 1$.

(b) $X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 8$ durch $2X - 1$.

(c) $2X^6 - X^5 - 3X^4 - 10X^3 + 3X^2 - X + 10$ durch $X^3 - 2X - 5$.

Aufgabe 6.4 (Nullstellen)
Bestimmen Sie die Nullstellen von $X^2 + X$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
(Ist die Anzahl der Nullstellen gleich dem Grad des Polynoms?)

Bitte wenden!

Aufgabe 6.5 (Nullteilerfrei)
Zeigen Sie für $m \geq 2$:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ ist nullteilerfrei} \qquad \Leftrightarrow \qquad m \text{ ist eine Primzahl.}$$

Aufgabe 6.6 (Unterringe und Ideale)
Es sei K ein Körper und $R := M(2 \times 2; K)$ der Ring der 2×2 Matrizen über K. Es sei

$$H_1 := \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in K\}, \quad H_2 := \{\begin{pmatrix} a & c \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in K\}, \quad H_3 := \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in K\}.$$

Welche der H_1, H_2, H_3 sind Unterringe von R, welche sind Ideale?

Hinweise:

- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 26.11.2015.