



Übungsblatt 7

Tutoraufgaben:

Aufgabe 7.1 (Gaußsche Zahlen, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

Im Ring $R := \mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen sei das Ideal $\mathfrak{a} := (1 + i)$ gegeben.

- (a) Zeichnen Sie die Punkte aus \mathfrak{a} im Gitter R .
- (b) Beweisen Sie: $R/\mathfrak{a} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Aufgabe 7.2 (Hauptideal)

Bestimmen Sie ein Ideal $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, das kein Hauptideal ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe 7.3 (Unterringe und Ideale)

Im folgenden ist jeweils ein Ring R und eine Teilmenge $S \subset R$ gegeben. Geben Sie jeweils mit kurzer Begründung an, ob S ein Unterring oder ein Ideal ist.

- (a) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(a, 0) \in R \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
- (b) $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \{(a, a) \in R \mid a \in \mathbb{Z}\}$.
- (c) Es sei R der Ring der oberen 2×2 Dreiecksmatrizen über \mathbb{Q} , und $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in R \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.
- (d) $R = \mathbb{C}^{20 \times 20}$, $S = \{A \in R \mid \text{Rang}(A) < 20\}$.
- (e) $R = \mathbb{Q}^{2 \times 2}$, $S = \{A \in R \mid Ax_0 = 0\}$ mit $x_0 := (1, 1)^T \in \mathbb{Q}^2$.
- (f) $R = \mathbb{Z}[X]$, $S = \{f \in R \mid f(1) + f(2) = 0\}$.

Aufgabe 7.4 (Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$)

Es sei φ der Ringhomomorphismus $\varphi: \mathbb{Z}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f \mapsto f(\sqrt{-5})$.

- (a) Zeigen Sie: $\varphi(\mathbb{Z}[X]) = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- (b) Ist φ injektiv?

Aufgabe 7.5 (Primelemente)

Zerlegen Sie die Zahlen 2, 3, 5 und 7 in Primfaktoren in $\mathbb{Z}[i]$. Sie dürfen verwenden, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring mit Norm $N(a + bi) = a^2 + b^2$, $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ ist.

Aufgabe 7.6 (Nichtfaktorieller Ring)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ kein faktorieller Ring ist.

Hinweise:

- Wegen des Dies Academicus entfallen die Veranstaltungen am 3.12.2015. Die Tutorübungen/Ergänzungen werden am 2.12.2015 wieder zur Hälfte als Tutorübung und zur anderen Hälfte als Ergänzung abgehalten.
- Die Tutorübungen/Ergänzungen am 23.12.2015 entfallen genauso wie die Vorlesung am 22.12.2015.
- Die Tutorübungen/Ergänzungen werden am 7.01.2016 zur Hälfte als Tutorübung und zur anderen Hälfte als Ergänzung abgehalten.
- Homepage zur Lehrveranstaltung: <http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG>
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Tutorübung/Ergänzung am **2.12.2015!**