



## Übungsblatt 8

### Tutoraufgaben:

#### Aufgabe 8.1 (Staatsexamen, Herbst 2012)

Sei  $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right] \subset \mathbb{C}$  gegeben. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass  $R$  bezüglich der Normfunktion

$$N : R \rightarrow \mathbb{N}, \quad z \mapsto z\bar{z},$$

ein euklidischer Ring ist.

- (a) Bestimmen Sie alle Einheiten von  $R$ .
- (b) Zerlegen Sie 3, 5 und 7 in Primfaktoren in  $R$ .

#### Aufgabe 8.2 (Irreduzibilität)

Untersuchen Sie folgende Polynome auf Irreduzibilität in  $\mathbb{Q}[X]$ :

- (a)  $f = 3X^3 + 5X + 2$ ,
- (b)  $f = X^3 - 5X^2 + 3X + 2$ ,
- (c)  $f = X^3 + 39X^2 - 4X + 8$ ,
- (d)  $f = 3X^3 - 2X^2 - 6X + 4$ ,
- (e)  $f = X^3 + \frac{2}{9}X^2 + \frac{4}{3}X + \frac{1}{5}$ .

### Hausaufgaben:

#### Aufgabe 8.3 (Irreduzible Polynome in $\mathbb{F}_3[X]$ )

- (a) Bestimmen Sie die normierten irreduziblen Polynome von Grad  $\leq 3$  über  $\mathbb{F}_3[X] := \mathbb{Z}_3[X]$ .
- (b) Besitzt das Polynom  $X^4 + 2X^2 + 1$  Nullstellen in  $\mathbb{F}_3$  und ist es damit irreduzibel über  $\mathbb{F}_3[X]$ ?

#### Aufgabe 8.4 (Irreduzible Polynome)

Welche der folgenden Polynome sind in  $\mathbb{Q}[X]$  irreduzibel?

- (a)  $X^5 - 2X^4 + 6X + 10$ .
- (b)  $4X^2 + 4X + 1$ .
- (c)  $X^3 + 39X^2 - 4X + 8$ .

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 8.5** (Staatsexamen, Herbst 2004)

Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

(a)  $5X^3 + 63X^2 + 168$  in  $\mathbb{Z}[X]$ .

(b)  $X^4 + X + 1$  in  $\mathbb{F}_2[X]$ .

(c)  $X^9 + XY^7 + Y$  in  $\mathbb{Z}[X, Y]$ .

**Aufgabe 8.6** (Staatsexamen, Herbst 2004)

Bestimmen Sie im Polynomring  $\mathbb{Q}[X]$  den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome

$$f(X) = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1.$$

**Hinweise:**

- Homepage zur Lehrveranstaltung: <http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG>
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 10.12.2015.