Übungsblatt 9

Tutoraufgaben:

***Aufgabe 9.1** (Transzendente Körpererweiterungen)
Es sei $k(a)$ eine Körpererweiterung von k, mit a transzendent über k. Zeigen Sie:

(a) $k(a) \cong k(X)$, wobei $k(X)$ den Quotientenkörper von $k[X]$ bezeichnet;

(b) $[k(a) : k] = \infty$.

Aufgabe 9.2 (Staatsexamen, Teilaufgabe, Frühjahr 2015)
Im Folgenden ist jeweils L/K eine Körpererweiterung und ein Element $\alpha \in L$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α über dem Grundkörper K (mit Nachweis!).

$$K = \mathbb{Q}, \ \ L = \mathbb{C} \text{ und } \alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Hausaufgaben:

Aufgabe 9.3 (Körpererweiterungen)
Zeigen Sie, dass für $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt: $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \mathbb{Q}(\sqrt{p} + \sqrt{q})$.

Aufgabe 9.4 (Minimalpolynome)
Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden reellen Zahlen α über $\mathbb{Q}$:

(a) $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$,

(b) $\alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$,

(c) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt[3]{2}}$.

Hinweis: Das folgende Beispiel demonstriert, wie ein Kandidat für das Minimalpolynom gefunden werden kann. Es ist zu beachten, dass dieses so erhaltene Polynom reduzibel sein kann. Der Irreduzibilitätsnachweis ist somit gesondert zu führen.

Sei $\alpha = \sqrt{a}$ und $\beta = \sqrt{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Wir wollen ein Polynom in $\mathbb{Q}[X]$ bestimmen, dass $\gamma = \alpha + \beta$ als Nullstelle hat. Dafür berechnen wir die Potenzen von γ und benutzen die Relationen $\alpha^2 = a$ und $\beta^2 = b$, um nach Möglichkeit zu vereinfachen, und suchen dann nach einer linearen Abhängigkeitsrelation zwischen den Potenzen:

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (a+b) + 2\alpha\beta, \\ \gamma^4 &= (a+b)^2 + 4(a+b)\alpha\beta + 4\alpha^2\beta^2 = (a^2 + 6ab + b^2) + 4(a+b)\alpha\beta \end{aligned}$$

Die anderen Potenzen von γ brauchen wir in diesem Fall nicht, weil wir $\alpha\beta$ aus diesen zwei Gleichungen eliminieren können und so die Gleichung $\gamma^4 - 2(a+b)\gamma^2 + (a-b)^2 = 0$ erhalten. Das Element γ ist also Nullstelle des Polynoms $g = X^4 - 2(a+b)X^2 + (a-b)^2$ und dies Polynom hat, wie verlangt, Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 9.5 (Staatsexamen, Frühjahr 2009)
Betrachten Sie den Körper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \sqrt{7})$.

(a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ für $\alpha = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{7}$.

(b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

Hinweise:

- Raumwechsel: Die Übung am 16.12. findet im Raum MW 3707 statt.
- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 17.12.2015.