Übungsblatt 10

Tutoraufgaben:

***Aufgabe 10.1** (Körpererweiterungen)
Es sei $b := \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ und $\zeta_3 = \exp(2\pi i/3)$. Zeigen Sie, dass die drei Unterkörper

$$\mathbb{Q}(b),\ \mathbb{Q}(b\zeta_3),\ \mathbb{Q}(b\zeta_3^2)$$

als Unterkörper von $\mathbb{C}$ verschieden aber isomorph sind.

Aufgabe 10.2 (Elemente in $\mathbb{Q}(\alpha)$)
Es sei $\alpha \in \mathbb{C}$ Wurzel des Polynoms

$$h = X^3 - 6X^2 + 9X + 3 \in \mathbb{Q}[X].$$

Zeigen Sie, dass $(1, \alpha, \alpha^2)$ Basis von $\mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$ ist, und schreiben Sie die Elemente α^5, $3\alpha^4 - 2\alpha^3 + 1$, $(\alpha + 2)^{-1}$ als Linearkombination von 1, α, α^2.

Hausaufgaben:

Aufgabe 10.3 (Körpererweiterungen/Isomorphie)
Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 10.4 (Rechnen in einer Körpererweiterung vom Grad 3)
Es seien $f := X^3 + 3X - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.

(a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel.

(b) Stellen Sie die Elemente α^{-1}, $(1 + \alpha)^{-1}$ und $(1 - \alpha + \alpha^2)(5 + 3\alpha - 2\alpha^2)$ von $\mathbb{Q}(\alpha)$ als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ dar.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $2 + \alpha - 3\alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)$ über $\mathbb{Q}$.

Hinweis zu (c): Berechnen Sie zu $\beta := 2 + \alpha - 3\alpha^2$ die vier Elemente $1, \beta, \beta^2, \beta^3 \in \mathbb{Q}(a)$ und stellen Sie diese als $\mathbb{Q}$-Linearkombination der Basis $\{1, \alpha, \alpha^2\}$ dar. Die vier Elemente sind in diesem dreidimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum linear abhängig. Also können Sie, durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}$ bestimmen, so dass $\lambda_3 \cdot \beta^3 + \lambda_2 \cdot \beta^2 + \lambda_1 \cdot \beta + \lambda_0 = 0$ und damit β Nullstelle von $g = \lambda_3 X^3 + \lambda_2 X^2 + \lambda_1 X + \lambda_0$ ist.

Aufgabe 10.5 (Staatsexamen, Frühjahr 2008)
Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(\sqrt[17]{19})$.

Bitte wenden!

Aufgabe 10.6 (Staatsexamen, Frühjahr 2007)
Gegeben sei das Polynom $f := X^4 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$.

(a) Beweisen Sie: $L := \mathbb{Q}(\sqrt[4]{3}, i)$ ist Zerfällungskörper von f.

(b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$.

(c) Beweisen Sie: $a := \sqrt[4]{3} + i$ ist ein primitives Element von L über $\mathbb{Q}$.

***Aufgabe 10.7** (Primitive Elemente)
Es sei $b := \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$, $\zeta_3 := \exp(2\pi i/3) \in \mathbb{C}$ und $c := (\zeta_3 + 2)b$. Zeigen Sie:

(a) c ist ein primitives Element der Körpererweiterung $K \supset \mathbb{Q}$ (also gilt $\mathbb{Q}(c) = \mathbb{Q}(b, b\zeta_3)$).

(b) $c^6 + 108$ ist Minimalpolynom von c über $\mathbb{Q}$.

Hinweis: Zeigen Sie $c^3 = 6 + 12\zeta_3$ *und* $c^6 = -108$ *unter Verwendung der Gleichung* $\zeta_3^2 + \zeta_3 + 1 = 0$, *die ja wegen* $0 = \zeta_3^3 - 1 = (\zeta_3^2 + \zeta_3 + 1)(\zeta_3 - 1)$ *und* $\zeta_3 \neq 1$ *gilt.*

Hinweise:

- Die Tutorübungen/Ergänzungen werden am 7.01.2016 zur Hälfte als Tutorübung und zur anderen Hälfte als Ergänzung abgehalten.
- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 7.1.2016.
- Wir wünschen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!
  Ihr Algebra Team.