Übungsblatt 11

Tutoraufgaben:

Aufgabe 11.1 (Galois-Gruppen)
Es sei $k := \mathbb{Q}$ und $f := X^6 - 7X^4 + 16X^2 - 12 \in k[X]$. Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(f;k)$ von f über k isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist, indem Sie folgendes nachweisen:

(a) Die Nullstellen von f sind $\pm\sqrt{2}$ und $\pm\sqrt{3}$.

(b) $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ist Zerfällungskörper von f über k.

(c) $[K : \mathbb{Q}] = 4$.

(d) $\varphi \in \mathrm{Gal}(f;k)$ bildet Nullstellen von f auf Nullstellen von f ab, wobei $\varphi(\sqrt{2}) \neq \pm\sqrt{3}$ gilt.

Hausaufgaben:

Aufgabe 11.2 (Operationen von Gruppen auf Mengen)
Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Die durch die Rechtstranslation $r_a(x) = x \cdot a$ definierte Operation ist eine Operation der Gruppe G auf sich genau dann wenn G abelsch ist.

(b) Die durch die modifizierte Rechtstranslation $r'_a(x) = x \cdot a^{-1}$ definierte Operation ist immer eine Operation der Gruppe G auf sich.

Aufgabe 11.3 (Bahnenräume)
Es sei G eine Gruppe und M eine nicht leere Menge. Operiert G auf M und ist $x \in M$, so heißt

$$G(x) := \{a(x) \in M \ : \ a \in G\} \subset M$$

die *Bahn* von x. Zeigen Sie, dass die Relation

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad G(x) = G(y)$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 11.4 (Standgruppen)
Bestimmen Sie für $n \in \{1, \ldots, n\}$ die Standgruppe $\mathrm{Sta}_{\mathcal{S}_n}(n) < \mathcal{S}_n$, und zeigen Sie, dass diese für $n \geq 3$ kein Normalteiler ist.

Hinweise:

- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 14.1.2016.