Übungsblatt 12

Tutoraufgaben:

Aufgabe 12.1 (Galoisgruppe)
Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f;\mathbb{Q})$ von $f = X^3 - 2$ über $\mathbb{Q}$, und zeigen Sie, dass diese isomorph zur $\mathcal{S}_3$ ist.

Aufgabe 12.2 (Bahn)
Bestimmen Sie die Bahn von $c := (\exp(2\pi i/3) + 2)\sqrt[3]{2}$ aus Aufgabe 10.7 unter $\mathrm{Gal}(X^3 - 2;\mathbb{Q})$.

Bemerkung: Siehe Aufgabe 12.1 bzw. Definition von φ und ψ aus der Vorlesung.

Hausaufgaben:

Aufgabe 12.3 (Staatsexamen, Herbst 2014)
Es sei $P \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad $d \geqslant 3$, das mindestens eine Nullstelle $a \in \mathbb{R}$ und mindestens eine Nullstelle $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ hat. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen Automorphismus $\varphi \in \mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ mit $\varphi(a) = b$.

(b) Die komplexe Konjugation kann zu einem Automorphismus von L über $\mathbb{Q}$ eingeschränkt werden.

(c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Aut}(L/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

Aufgabe 12.4 (Fixkörper)
Es sei K ein Körper und $G < \mathrm{Aut}(K)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Fix}(K;G) \subset K$ ist ein Unterkörper.

(b) Ist $H < G$, so gilt $\mathrm{Fix}(K;H) \supset \mathrm{Fix}(K;G)$.

(c) $G < \mathrm{Aut}(K;\mathrm{Fix}(K;G))$.

(d) Ist L Unterkörper von K, so folgt dass L Unterkörper von $\mathrm{Fix}(K;\mathrm{Aut}(K;L))$ ist.

(e) Die Inklusion $L \subset \mathrm{Fix}(K;\mathrm{Aut}(K;L))$ in (d) kann echt sein.

(f)* In (c) gilt stets $G = \mathrm{Aut}(K;\mathrm{Fix}(K;G))$.

Hinweise:

- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 21.1.2016.