Übungsblatt 14

Tutoraufgaben:

Aufgabe 14.1 (Staatsexamen, Frühjahr 2013)
Sei $K = \mathbb{F}_5\left(\sqrt[4]{3}\right)$. Zeigen Sie, dass K eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{F}_5$ ist und bestimmen Sie ihre galoissche Gruppe. Bestimmen Sie weiter den Verband der Zwischenkörper von K über $\mathbb{F}_5$ (das heißt alle Zwischenkörper geordnet nach Inklusionen). Bestimmen Sie schließlich die Anzahl der primitiven Elemente der Erweiterung K über $\mathbb{F}_5$.

Aufgabe 14.2 (Staatsexamen, Herbst 2013)

(a) Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist.

(b) Sei α eine Nullstelle des Polynoms $f(X)$ aus Teilaufgabe (a) in einem algebraischen Abschluss $\overline{\mathbb{F}_2}$ von $\mathbb{F}_2$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_2(\alpha) = \mathbb{F}_{16}$ gilt, dass $\alpha \in \mathbb{F}_{16}^\times$ gilt, und dass α ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_{16}^\times$ von $\mathbb{F}_{16}$ ist.

Hausaufgaben:

Aufgabe 14.3 (Kreisteilungspolynome)
Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ seien die primitiven n-ten Einheitswurzeln über $\mathbb{Q}$ mit $\xi_1, \dots, \xi_{\varphi(n)}$ bezeichnet (φ bezeichne die Eulersche Phi-Funktion). Das Polynom

$$\Phi_n = (X - \xi_1) \cdot \ldots \cdot (X - \xi_{\varphi(n)})$$

heißt n-tes Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$.

(a) Zeigen Sie: $\Phi_{2^k} = X^{2^{k-1}} + 1$ für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(b) Berechnen Sie das n-te Kreisteilungspolynom $\Phi_n \in \mathbb{Q}[X]$ für $n = 15$.
(Teilaufgabe einer Staatsexamensaufgabe, Frühjahr 2009.)

(c) Es sei $\zeta \neq 1$ eine n-te Einheitswurzel. Zeigen Sie: $1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.

Aufgabe 14.4 (Staatsexamen, Herbst 2010)
Sei $P := X^4 + X + 2 \in \mathbb{F}_3[X]$ und $K = \mathbb{F}_3[X]/(P)$. Weiter sei a das Bild von X in K.

(a) Zeigen Sie, dass K ein Körper mit 81 Elementen ist.

(b) Bestimmen Sie explizit alle Teilkörper von K. Hierbei heiße „explizit“: Die Angabe einer $\mathbb{F}_3$-Basis, wobei die Basiselemente Polynome in a vom Grad $\leqslant 3$ sind. (Hinweis: Betrachten Sie $a^{10} \in K$.)

Bitte wenden!

Aufgabe 14.5 (Staatsexamen, Herbst 2015)
Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_5[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass $K := \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$ ein Körper mit 25 Elementen ist.

(b) Bestimmen Sie ein Element $w \in K$, mit $w^2 = 2$.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{F}_5)$$
über K diagonalisierbar ist.

Hinweise:

- **Die Vorlesung am 04.02. findet im Raum MI 00.07.014 statt.**
- Homepage zur Lehrveranstaltung: `http://www-m9.ma.tum.de/WS2015/AlgLG`
- Abgabe der Hausaufgaben: In der Vorlesung am 04.02.2016.